ŢEPEŞ ONEA FLORIN

STATICA CONSTRUCŢIILOR partea I

“Ovidius University Press”
Constanţa 2004

Referenţi ştiinţifici:

Prof.dr.ing. Valeriu Bănuţ
Conf.dr.ing. Mircea Eugen Teodorescu

Mulţumesc pe această cale Prof.dr.ing. Valeriu Bănuţ pentru sprijinul acordat la realizarea acestei cărţi.

"Ovidius Univesity Press" Constanţa ,2004

ISBN 973-614-214-0

CUPRINS partea I

CAP.1 Introducere în Statica Construcțiilor. 5
1.1 Obiectul cursului. 5
1.2 Clasificarea elementelor de construcții. 5
1.3 Echilibrul static. 6
1.4 Ipoteze simplificatoare. 6
1.5 Tipuri de acțiuni în construcții. Schematizarea forțelor. 7
1.6 Legarea invariabilă a elementelor structurale în plan. 8
1.7 Condiția de determinare statică 9
1.8 Tipuri de structuri utilizate în construcții 10
1.9 Exprimarea analitică a condiției de echilibru static. 12
1.10 Calculul reacțiunilor 13
1.11 Eforturi şi convenții de semne 14
1.12 Relații diferențiale între acțiuni şi eforturi 15

CAP.2 Grinzi drepte static determinate 17
2.1 Încărcări pe grinzi drepte static determinate 17
2.2 Relațiile de recurență 21
2.3 Grinzi cu console şi articulații (grinzi Gerber) 31

CAP.3 Cadre static determinate. 41
3.1 Bare cotite 42
3.2 Calculul eforturilor pentru cadre static determinate 44
3.3 Utilizarea simetriei şi antisimetriei 51

CAP.4 Arce static determinate 59
4.1 Generalități 59
4.2 Relații diferențiale între acțiuni şi eforturi. 61
4.3 Arcul cu trei articulații. Calculul reacțiunilor şi al eforturilor. 62
4.4 Arcul cu tirant. 63
4.5 Arcul de coincidență. 64

CAP.5 Structuri plane alcătuite din bare articulate în noduri. 75
5.1 Generalități. 75
5.2 Condiții de determinare statică şi invariabilitate geometrică. 77
5.3 Clasificarea structurilor plane cu zăbrele. 79
5.4 Metoda izolării nodurilor. 81
5.5 Metoda secțiunilor. 82

CAP.6 Utilizarea principiului lucrului mecanic virtual. 87
6.1 Cente absolute. Centre relative 89
6.2 Determinarea reacțiunilor şi eforturilor pentru structuri static determinate 91

CAP.7 Linii de influență 101
7.1 Semnificația liniilor de influență 101
7.2 Metoda analitică 102
7.2.1 Grinda simplu rezemată 102
7.2.2 Grinda cu consolă 104
7.3 Metoda cinematică 106

CAP.8 Deformarea elastică a structurilor. 109
8.1 Vectorul forță. Vectorul deplasare. 109
8.2 Comportarea structurilor. 110
8.3 Lucrul mecanic al forțelor exterioare. 110
8.4 Lucrul mecanic al forțelor interioare. Lucrul mecanic al eforturilor. 112
8.5 Lucrul mecanic total. 114
8.6 Teorema lui Clapeyron. 114
8.7 Principiul lucrului mecanic virtual aplicat corpurilor deformabile. 115
8.8 Teoremele lui Castigliano 118
8.9 Teorema generală a reciprocității şi formele sale particulare 117
8.9.1 Teorema reciprocității lucrurilor mecanice (teorema Betti) 117
8.9.2 Reciprocitatea deplasărilor unitare 118
8.9.3 Reciprocitatea reacțiunilor unitare 119
8.9.4 Calculul deplasărilor punctuale ale structurilor elastice Relația Maxwell-Mohr 119
8.10 Regula de integrare Vereşceaghin. 122
8.11. Deplasări elastice 123

CAP.9 Metoda eforturilor. 139
9.1 Gradul de nedeterminare statică. 137
9.2 Sistem de bază. 142
9.3 Condiția de echilibru static. 143
9.4 Ecuații de compatibilitate. 144
9.4.1 Calculul elementelor din matricea flexibilității structurii de bază 145
9.4.2 Calculul elementelor din matricea termenului liber. 145
9.4.3 Eforturile finale în structura static nedeterminată. 146
9.4.4 Calculul deplasărilor pe structura static nedeterminată. 146
9.5 Posibilități de simplificare a ecuațiilor de condiție. 159
9.5.1 Alegerea judicioasă a sistemului de bază 159
9.5.2 Structuri simetrice 161
9.5.3 Procedeul semistructurii 161
9.5.3 Procedeul grupării necunoscutelor 162
9.5.5 Transferarea necunoscutelor 163

CAP.1 INTRODUCERE ÎN STATICA CONSTRUCȚIILOR

1.1 Obiectul cursului

Statica construcțiilor se ocupă cu studiul metodelor de calcul pentru determinarea eforturilor şi deplasărilor structurilor de rezistență ale construcțiilor alcătuite din bare, supuse la acțiuni statice. Constituie materia de bază în domeniul numit calcul structural.

Chiar dacă în ziua de astăzi în general în activitatea de proiectare se folosesc programe de calcul automat, metodele folosite în statica construcțiilor, metoda eforturilor şi metoda deplasărilor, se pretează mai bine în calculul unor elemente structurale de mici dimensiuni, decît un program de calcul automat . Pe de altă parte aceste metode pot fi folosite în paralel cu programele de calcul automat pentru compararea rezultatelor.

1.2 Clasificarea elementelor de construcții

Corpurile solide din care este alcătuită structura sînt legate între ele pentru a obține forma dorită. Orice element de construcție se caracterizează prin trei dimensiuni: lungime, lățime si grosime. După raportul între aceste dimensiuni elementele de construcție se împart în trei categorii:

-Barele sînt elementele la care una din dimensiuni este mare în raport cu celelalte două (fig.1.1).

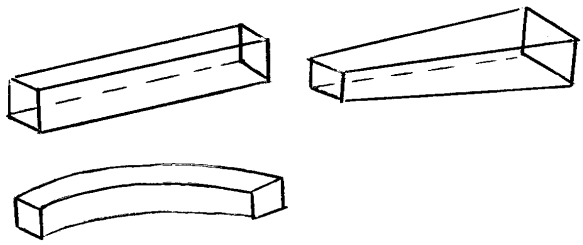


Fig.1.1 Bare

Elementele geometrice caracteristice unei bare sînt: axa barei, forma si dimensiunile secțiunii transversale.

Dupa forma axei barele pot să fie bare drepte, bare curbe plane si bare curbe în spațiu. Dacă raportul între suprafața secțiunii transversale si lungimea barei este neglijabil se consideră că barele nu au rigiditate transversală şi aceste elemente de construcții poartă numele de fire sau cabluri.

-Plăcile sînt elementele la care două dimensiuni sînt mari in raport cu a treia (fig.1.2)

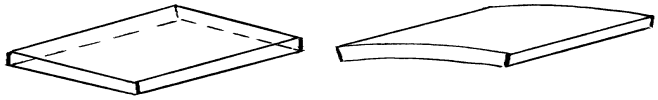


Fig.1.2 Plăci

Dupa forma suprafeței mediane plăcile pot să fie: placi plane sau dale, plăci curbe cu simplă curbură şi plăci curbe cu dublă curbură.

-Blocurile (fig.1.3) sau masivele sînt acele corpuri la care cele trei dimensiuni sînt aproximativ de acelaşi ordin de mărime. Ele se întîlnesc în practică ca fundații pentru stîlpi, baraje de greutate, ziduri de sprijin.

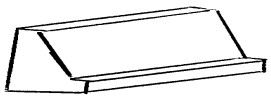


Fig.1.3

1.3 Echilibrul static

Construcţiile în ansamblu şi orice porţiune izolată din acestea, trebuie să fie în echilibru cînd asupra lor se aplică forţele exterioare(acţiunile directe) şi forţele de legătură.
Starea de echilibru a construcţiei are loc în poziţia deformată deoarece materialele de construcţii se deformează la aplicarea acţiunilor directe şi indirecte.

Diferenţa între modul de rezolvare a problemelor în Mecanica teoretică (care consideră corpurile perfect rigide) şi Mecanica construcţiilor (care consideră corpurile deformabile) constă în tratarea diferită a echilibrului corpurilor reale.
Condiţiile de echilibru ale corpurilor rigide, cunoscute din Mecanica teoretică exprimă aspectul static al problemei şi conduc la noţiunea de echilibru static.

Definirea echilibrului unei structuri necesită analiza tuturor aspectelor de care depinde starea deformată a construcţiei: static, geometric şi fizic
-aspectul static: satisfacerea ecuaţiilor de echilibru de către totalitatea forţelor exterioare şi interioare ce solicită structura respectivă;
-aspectul geometric: deformaţia structurii trebuie să respecte condiţiile de compatibilitate din reazeme şi condiţiile de continuitate pe toată structura (ecuaţiile de compatibilitate)
-satisfacerea relaţiilor între forţele care acţionează structura şi deformaţiile care se produc (ecuaţiile constitutive), relaţii stabilite pe cale experimentală şi care introduc în calcul datele fizice ale structurii (natura materialului, dimensiunile elementelor).

1.4 Ipoteze simplificatoare

La proiectarea construcţiilor se admit o serie de simplificări referitoare la alcătuirea structurii de rezistenţă, la schematizarea acţiunilor pe care le suportă şi la modul de comportare a materialului.

Poziţia deformată a structurii se menţine în domeniul micilor deplasări de aceea ecuaţiile de echilibru static se scriu pe structura iniţială nedeformată.
Ipotezele simplificatoare pentru calculul structurilor în domeniul elastic sînt:
-forţele se aplică static;
-este valabilă ipoteza lui Bernoulli, potrivit căreia o secţiune plană şi normală înainte de deformare rămîne plană şi normală şi după deformare;
-relaţia forţă-deplasare este liniară;
-materialul este continuu, omogen si izotrop
-materialele se comportă elastic si satisfac legea proportionalităţii între eforturile unitare şi deformaţiile specifice.
-proprietăţile materialelor sînt invariabile în timp

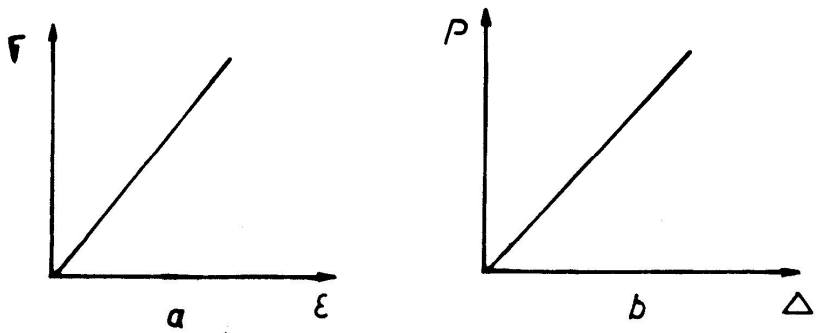


Fig.1.4 a)Relaţia efort unitar-deformaţie specifică; b)relaţia forţă-deplasare

1.5 Schematizarea forţelor. Schematizarea legăturilor

După suprafaţa pe care se repartizează, acţiunile pot fi:

-forţe sau momente concentrate, forţe la care se consideră că întreaga intensitate se aplică într-un singur punct.

-forţe sau momente uniform distribuite care se repartizează pe suprafaţă sau pe lungime (fig.1.5)

Dupa poziţia acţiunii faţă de construcţii, acţiunile se împart în:

-acţiuni cu poziţie fixă, care nu-şi modifică punctul de aplicaţie pe toată durata de exploatare a construcţiei.

-acţiuni mobile, care îşi schimbă punctele de aplicaţie pe elementul de construcţie , putînd acţiona în orice punct al caii de rulare.

Dupa modul de variaţie a intensităţii acţiunilor în timp acestea pot fi:

-acţiuni statice a caror intensitate creşte încet de la valoarea zero la valoarea finală, care rămîne constantă

-acţiuni dinamice , caz în care forţele care acţionează pe structură au variaţie funcţie de timp ($P_I=f_i(t)$).

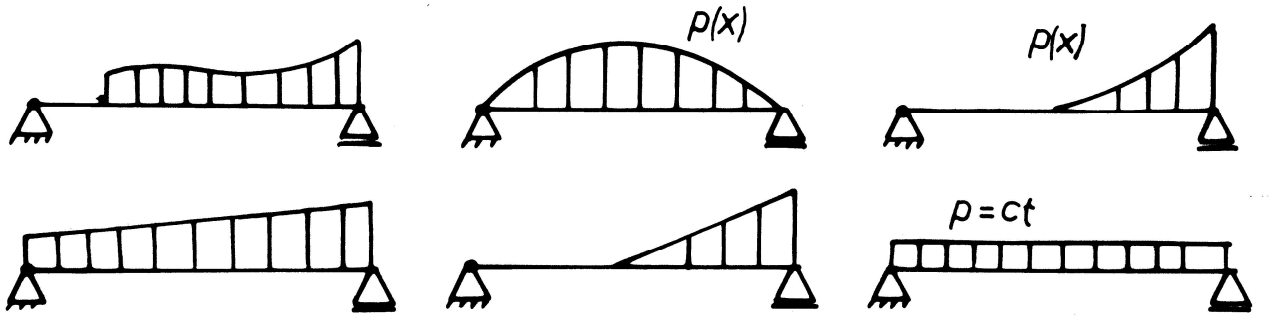


Fig.1.5 Forţe uniform distribuite

Schematizarea legăturilor; rezemări în plan (fig.1.6):

Legăturile exterioare ale unei construcţii se numesc rezemări şi se caracterizează prin faptul că împiedică anumite tendinţe de deplasare ale construcţiei în punctele respective.

-Reazemul simplu împiedică numai translaţia pe normala la suprafaţa de contact, dar translaţia cuprinsă în planul tangent şi rotirea în jurul muchiei de contact fiind posibile. Echivalentul mecanic al unei asemenea legături îl reprezintă o forţă cu punct de aplicaţie cunoscut şi direcţie cunoscută.

-Articulaţia împiedică translaţia pe orice directie în plan, rotirea în jurul normalei în punctul de contact fiind liberă. Echivalentul mecanic al unei asemenea legături îl reprezintă o forţă cu punct de aplicaţie cunoscut şi direcţie necunoscută.

-Încastrarea împiedică translaţia pe orice direcţie în plan precum şi rotirea. Unei încastrări îi corespunde o reacţiune forţă la care nu se cunosc punctul de aplicaţie, mărimea şi direcţia, deci trei necunoscute corespunzatoare celor trei deplasări împiedicate după: orizontală, verticală si rotirea.

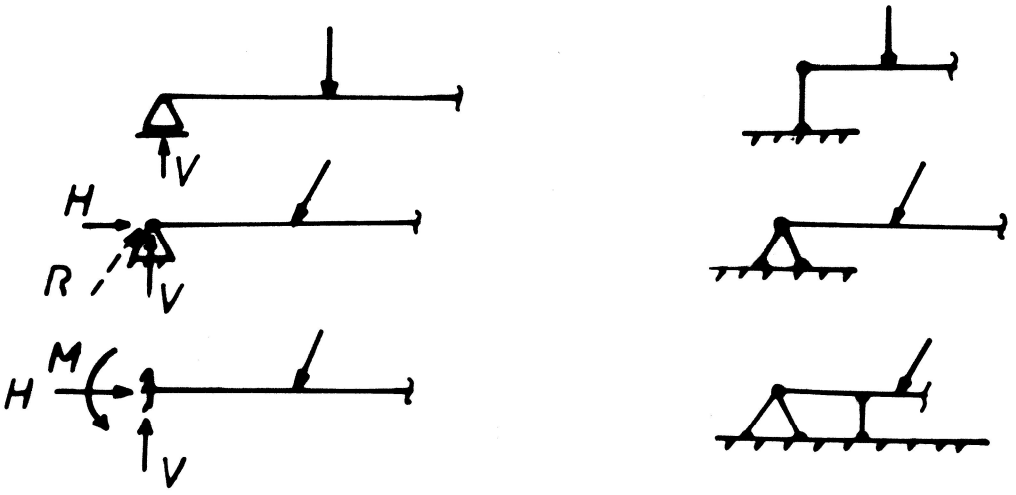


Fig.1.6 Tipuri de rezemări

1.6 Legarea invariabilă a elementelor structurale în plan

Construcţiile au nevoie de un număr minim de legături cu terenul sau cu alte elemente pentru a-şi păstra indeformabilitatea geometrică si fixarea în plan. Problema care trebuie rezolvată constă în stabilirea numărului de legături şi a modului de distribuţie al acestora.

Pentru a studia legarea invariabilă în plan a unui element structural (fig.1.7) de o baza de rezemare se consideră un element fixat prin legăturile 1 si 2. Dacă ar exista numai aceste legături (fig.1.7a) corpul s-ar putea rotii în jurul punctului A. Fixarea completă se obţine împiedicînd această posibilitate de rotire prin introducerea pendulului 3.

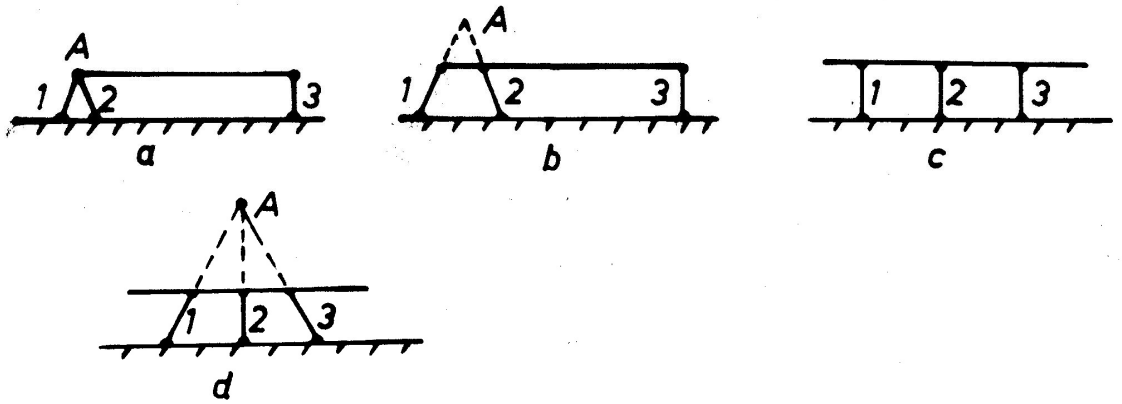


Fig.1.7 Legarea unui corp faţă de teren
a,b-legări corecte ; c,d-legări incorecte

Legarea invariabilă a unui element structural în plan nu depinde numai de numărul legăturilor ci şi de modul de dispunere a acestora. Astfel cînd legăturile sînt paralele (fig.1.7c) există posibilitatea deplasării laterale a elementului, iar cînd legăturile sînt concurente în acelaşi punct elementul structural se poate roti în jurul punctului A (fig.1.7d).

Această rotire încetează să se mai producă în momentul în care cele trei legături nu mai sînt concurente. Apare aici situaţia de formă critică, inacceptabilă în alcătuirea unei structuri.

Fixarea în plan a unui corp se poate face prin:

-trei legături simple plasate în acelaşi punct;

-trei legături simple plasate în două puncte (articulaţie şi reazem simplu), cu condiţia ca cele trei legături să nu fie concurente;

-trei legături simple plasate în trei puncte , cu condiţia ca ele să nu fie paralele sau concurente;

Aceste concluzii sînt valabile şi în cazul legării a doua sau mai multe elemente structurale în plan pentru a obţine o structură cu invariabilitatea geometrică asigurată.

1.7 Condiţia de determinare statică

Se consideră o structură alătuită din c corpuri, legate între ele şi faţă de teren prin l_i+r legături simple, reprezentînd numărul minim de legături necesar asigurării invariabilităţii geometrice şi fixării faţă de teren.

l_i=număr legături interioare

r=legături cu baza de susţinere

Prin suprimarea celor l_i+r legături se pun în evidenţă li+r forţe de legătură care trebuie determinate, pentru a putea trece la calculul eforturilor. Echilibrul unui corp poate fi exprimat prin scrierea a trei ecuaţii de echilibru static deci 3c ecuaţii pentru întregul ansamblu. Satisfacerea unei relaţii de forma $l_i + r = 3c$ permite determinarea tuturor forţelor de legătură.

c=numărul de corpuri care alcătuiesc ansamblul

Comparînd numărul forţelor de legătură din rezemări şi legăturile interioare cu numărul total al ecuaţiilor de echilibru static, se stabileşte condiţia de determinare statică. Condiţia de determinare statică cere ca numărul ecuaţiilor de echilibru static sa fie egal cu numărul necunoscutelor, adică:

$(1.1)\cdots l + r = 3c$

Relaţia (1.1) poate fi scrisă şi sub forma :

$(1.2)\ldots n = l + r - 3c$ unde:

n=gradul de nedeterminare statică

Relaţia (1.1) stabileşte condiţiile de invariabilitate geometrică , de fixare în plan şi de determinare statică.

Structurile static determinate au deci numărul minim de legături necesar pentru asigurarea invariabilităţii geometrice şi a fixării în plan.

Structurile static nedeterminate au un număr mai mare de legături decît cel minim necesar pentru asigurarea invariabilităţii geometrice şi fixării cu baza de susţinere.

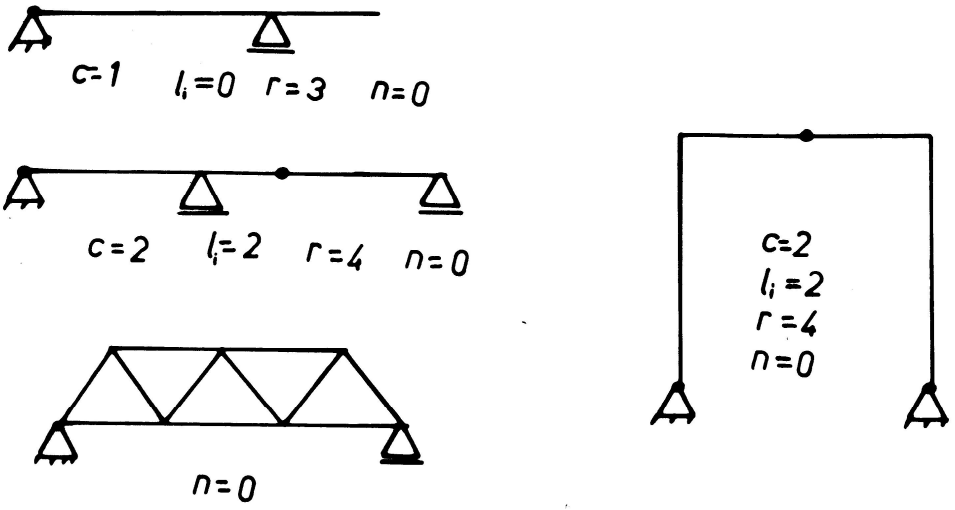


Fig.1.8 Prezentare număr contururi ,legături interioare,grad de nedeterminare

În afară de valoarea n=0 care corespunde structurilor static determinate relația (1.2) mai poate lua şi alte valori. Cînd n<0, adica $l_i + r < 3c$ înseamnă că numărul de legături nu este suficient pentru a asigura o legare invariabilă a structurii; rezultă un mecanism care are posibilitați de deplasare cinematică. Pentru fiecare legatură lipsă, față de numărul minim necesar , în structură apare o posibilitate distinctă de deplasare numită grad de libertate cinematică.
În figura 1.9 se dau exemple de mecanisme, indicînd punctat posibilitățile de deplasare cinematică.

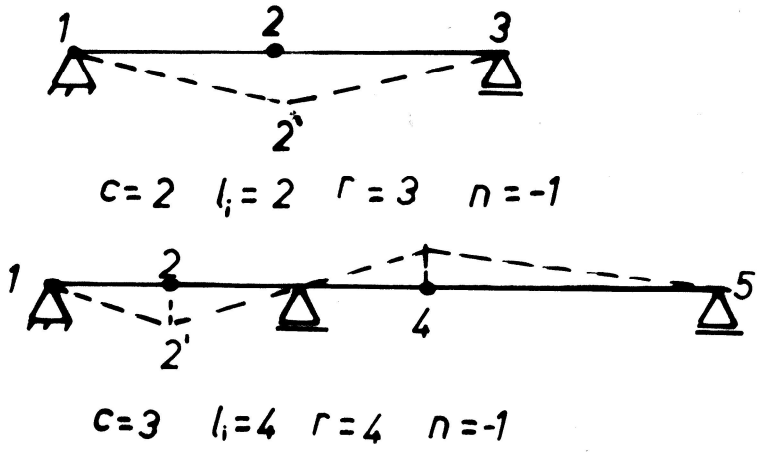


Fig.1.9 Exemple de mecanisme

Cînd n>0 deci $l_i + r > 3c$, structura are mai multe legături decît numarul minim, şi se numesc structuri static nedeterminate. Surplusul de legături este egal cu valoarea lui n. Numărul de necunoscute $l_i + r$ este mai mare decît numarul de ecuații (3c) şi condițiile de echilibru static nu mai sînt suficiente pentru calculul forțelor de legatură. Legăturile suplimentare ale structurilor static nedeterminate pot fi legături exterioare, interioare, sau ambele categorii de legături.

1.8 Tipuri de structuri utilizate în construcții

Construcțiile au alcătuire spațială, deci calculul riguros al acestora necesită rezolvarea unor structuri spațiale. Dacă se neglijează o serie de efecte de importanță secundară, se poate descompune structura spațială într-o serie de structuri plane.

Tipuri de structuri:

-grinzi drepte, bare cu axa rectilinie, solicitate dominant la încovoiere. Funcție de distribuția şi numărul legăturilor se pot distinge: grinda pe două reazeme (fig.1.10a), consola (1.10b), grinda cu consolă (1.10c), grinda cu console si articulații (1.10d) grinda continuă(1.10c)

-cadrele sînt structuri alcatuite din bare la care în toate nodurile sau numai la o parte din ele, legatura dintre bare este rigidă.

La aceste structuri pe lînga solicitarea dominantă de încovoiere în unele cazuri devine importantă şi solicitarea axială din bare. Cadrele apar frecvent în construcții ca structuri de rezistență pentru hale industriale, clădiri etajate etc.

-arcele (fig.1.10 j,k,l,m) sînt bare cu axa curbă plană supuse unor acțiuni cuprinse în planul curbei. În urma solicitării arcelor, în reazeme iau naştere împingeri laterale. Împingerile fac ca arcele sa lucreze mai bine la încovoiere decît grinzile drepte, ceea ce permite acoperirea unor deschideri mai mari cu acelaşi consum de materiale.

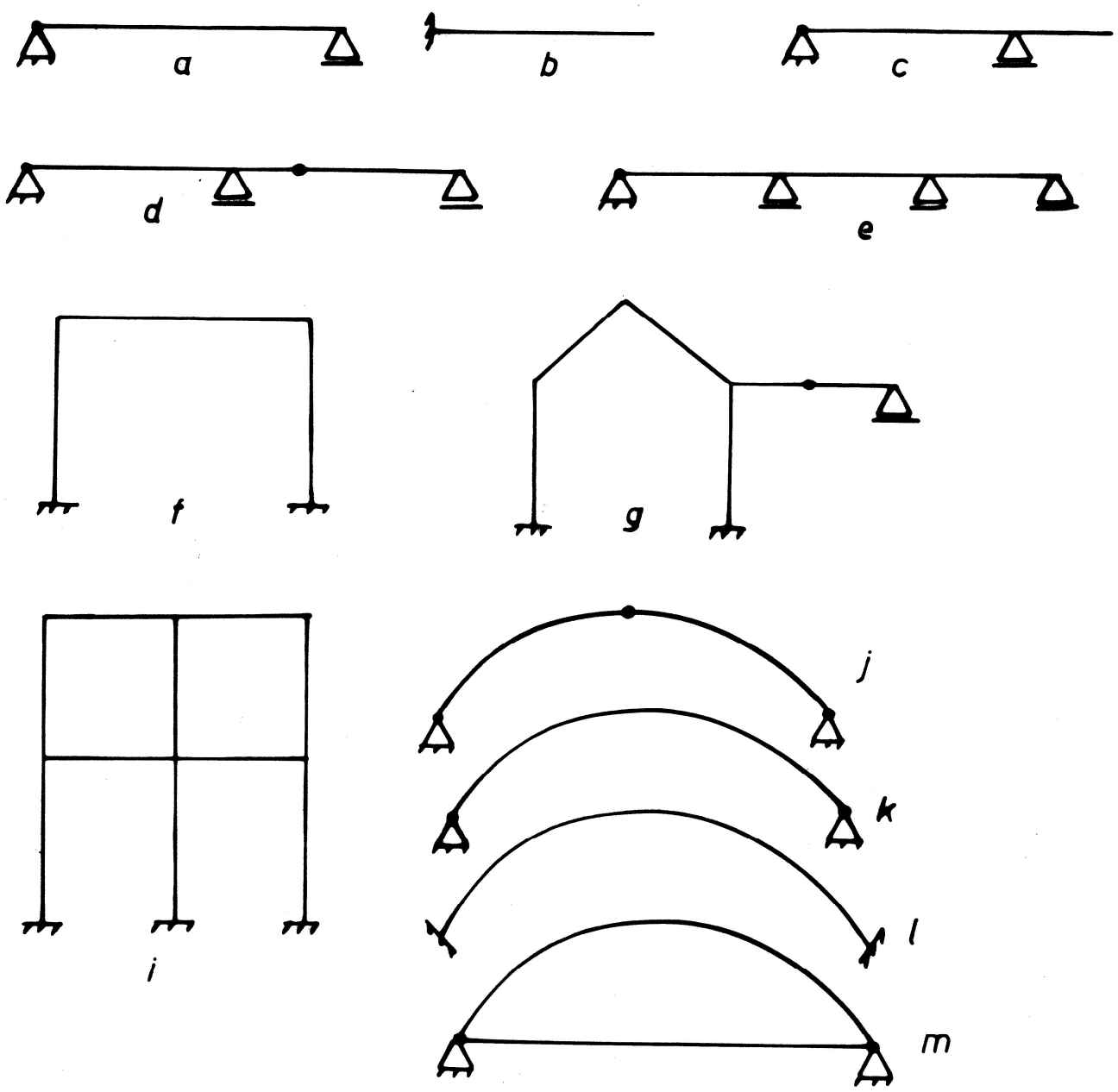


Fig.1.10 Tipuri de structuri

1.9 Exprimarea analitică a condiției de echilibru static

În mecanica teoretică exprimarea echilibrului corpului rigid se bazează pe axioma legăturilor în conformitate cu care legăturile se pot suprima cu condiția introducerii efectelor mecanice ale acestora, şi anume a forțelor de legătură.

Numărul ecuațiilor scalare de echilibru pentru un corp rigid este egal cu cel al gradelor de libertate pe care le prezintă corpul liber în spațiu.

În Statica construcțiilor ecuațiile de echilibru static se scriu pe forma inițială şi nu pe cea deformată. În concluzie corpul sau corpurile din care este alcătuită structura pot fi considerate "corpuri rigide" ca în Mecanica teoretică.

Pentru exprimarea analitică a condiției de echilibru static a unei structuri, pe lîngă acțiunile la care este supusă structura, trebuie cunoscute si reacțiunile care iau naştere în rezemări. Pentru calculul reacțiunilor se consideră suprimate rezemările şi se înlocuiesc cu forțe de legătură corespunzătoare (fig.1.11).

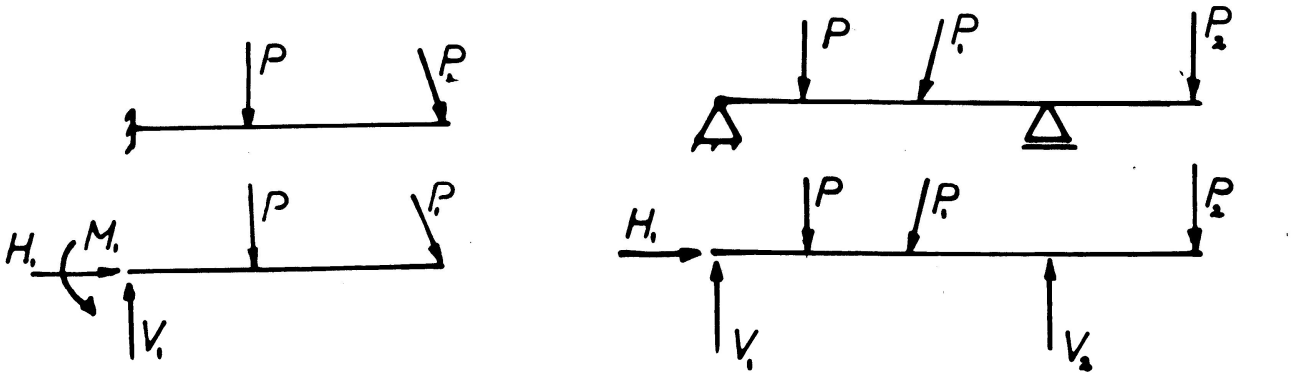


Fig.1.11 Prezentarea echivalentului mecanic al legăturilor suprimate

Calculul reacțiunilor se face folosind condiția de echilibru static pentru structura în ansamblu sau pentru anumite substructuri. Problemele de echilibru static se rezolvă prin două modalități:

-utilizarea ecuațiilor de echilibru static;

-utilizarea principiului lucrului mecanic virtual;

Ecuațiile de echilibru static pentru o structură plană, solicitată în planul său se scriu sub forma:

$$\sum X_i = 0; \sum Y_i = 0; \sum M_i = 0 \quad (1.3)\cdots$$

adică suma proiecțiilor tuturor forțelor pe două direcții diferite din plan şi suma momentelor acestor forțe în raport cu un punct oarecare din plan trebuie sa fie nule. În calculele practice nu este necesar totdeauna să se folosească cele trei ecuații sub forma a doua ecuații de proiecții şi una de momente. Ecuațiile de mai sus se pot scrie şi în alte moduri, cu condiția ca cele trei ecuații sa fie liniar independente. Din Mecanica corpurilor rigide se cunosc următoarele posibilitați:

-două ecuații de proiecție după două axe oarecare din plan şi o ecuație de momente în raport cu o axă perpendiculară într-un punct oarecare din plan

-o ecuație de proiecție după o axa oarecare din plan şi două ecuații de momente în raport cu două axe perpendiculare pe două puncte din plan, alese în aşa fel ca dreapta care uneşte punctele să nu fie perpendiculară pe axa de proiecții.

-trei ecuații de momente în raport cu trei axe perpendiculare pe plan în trei puncte necoliniare din plan .

În general pentru fiecare porţiune rigidă a structurii se pot scrie cîte trei ecuaţii de echilibru static; dacă structura este alcătuită din "c" porţiuni, numărul total de ecuaţii este 3c. În aceste ecuaţii intervin toate forţele de legătură exterioare şi interioare, astfel că ele cuprind şi ecuaţiile de echilibru corespunzătoare ansamblului structurii. Acestea din urmă se regăsesc sumînd ecuaţiile respective referitoare la porţiunile rigide, termenii provenind de la acţiunile reciproce din legăturile interioare anulîndu-se doi cîte doi.

Dacă structura este astfel alcătuită încît conţine numărul minim de legături necesar pentru asigurarea invariabilităţii geometrice şi fixarea în plan, deci dacă satisface condiţia care are forma: $l_i + r = 3c$ rezultă că ecuaţiile de echilibru static sînt suficiente pentru aflarea tuturor forţelor de legătură.

Aplicarea ecuaţiilor trebuie făcută cu discernămînt. Nu înseamnă că pentru orice structură este utilă izolarea porţiunilor rigide componente şi scrierea tuturor celor 3c ecuaţii de echilibru static. Deseori cunoaşterea acţiunilor reciproce din legăturile interioare nu este necesară pentru determinarea eforturilor. Ceea ce interesează în primul rînd sînt reacţiunile din rezemări. Cît timp aceste reacţiuni sînt în număr de trei, ecuaţiile de echilibru referitoare la ansamblul structurii sînt suficiente.

O situaţie interesantă apare atunci cînd, deşi condiţia l+r=3c este îndeplinită numărul reacţiunilor din rezemări este mai mare decît trei; înseamnă că structura nu are invariabilitate geometrică proprie.

Ecuaţiile de echilibru static referitoare la ansamblul structurii pot fi numite ecuaţii principale, iar cele referitoare la echilibrul porţiunilor izolate, ecuaţii secundare. Este recomandabil ca acestea din urmă să fie utilizate numai în măsura efectiv necesară, conducînd rezolvarea pe calea cea mai simplă.

Aplicarea ecuaţiilor de echilibru static trebuie făcută în mod judicios, spre a se obţine relaţii cît mai simple şi cu cît mai puţine necunoscute în fiecare din ele. Trebuie urmărit pe cît posibil ca necunoscutele să fie determinate succesiv, de fiecare dată folosind cîte o ecuaţie conţinînd o singură necunoscută.

Se poate ajunge la aceasta prin:

(1) o alegere potrivită a ordinii în care se folosesc ecuaţiile, începînd de preferinţă cu ecuaţii de momente, care prezintă mai multă suplețe în aplicare.

(2) o alegere potrivită a punctelor în raport cu care se scriu ecuaţiile de momente, astfel ca să se elimine din relaţii cît mai multe necunoscute.

(3) o alegere potrivită a axelor în raport cu care se aplică ecuaţiile de proiecţii, ţinînd seama de particularităţiile direcţiilor forţelor considerate.

O atentă respectare a acestor criterii poate elimina deseori numeroase calcule inutile care complică rezolvările făcute dezordonat.

1.10 Calculul reacţiunilor

La structurile alcătuite dintr-un singur element structural se pot scrie trei ecuaţii de echilibru static şi se determină trei necunoscute (fig.1.12).

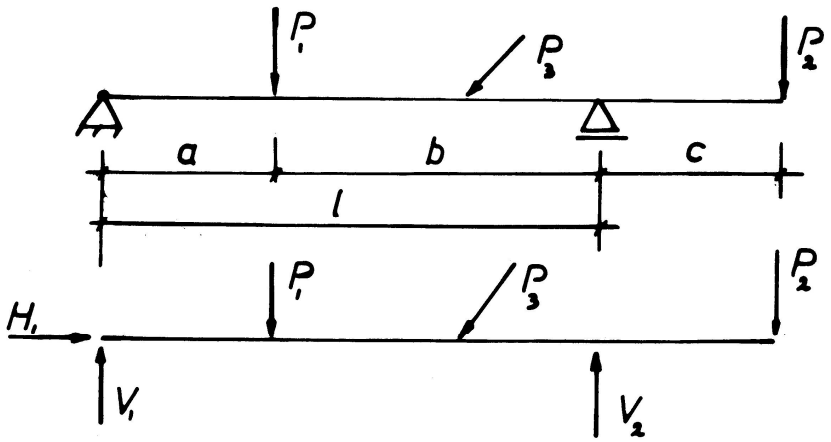


Fig.1.12 Reacțiuni pentru bara dreaptă simplu rezemată

Din examinarea legării invariabile a unui corp în plan a rezultat că numărul minim de legături este trei , ceea ce înseamnă că ecuațiile de echilibru static sînt suficiente pentru determinarea reacțiunilor unei structuri ale cărei rezemări introduc în calcule numai trei necunoscute. La calculul reacțiunilor se utilizează următoarele convenții de semne: forțele care se proiectează în sensul pozitiv al axelor de coordonate şi momentele care se rotesc în sens orar se consideră pozitive.

$$(2.2)\cdots\left(\sum M\right)_2 = V_1 \cdot l - P_1 \cdot a \cdot b + P_2 \cdot c = 0\cdots$$

$$\cdots\cdots V_1 = \frac{P_1 \cdot b - P_2 \cdot c}{l}$$

$$\cdots\cdots\left(\sum M\right)_1 = -V_2 \cdot l + P_1 \cdot a + P_2 \cdot (l + c) = 0$$

$$\cdots\cdots V_2 = \frac{P_1 \cdot a + P_2 \cdot (l + c)}{l}$$

Dacă pentru reacțiuni rezultă semnul pozitiv, înseamnă că sensul presupus inițial a fost corect ales, iar daca rezultă semnul negativ înseamnă că sensul real este invers celui inițial. Calculele se verifică prin scrierea ecuației de echilibru dupa axa y.

1.11 Eforturi şi convenții de semne

Definiția eforturilor N,T,M se face astfel:

-forța axială N, pe fața din dreapta a secțiunii, este egală cu suma proiecțiilor pe tangenta la axa barei a tuturor forțelor exterioare de la stînga secțiunii.

-forța tăietoare T, pe fața din dreapta a secțiunii, este egală cu suma proiecțiilor pe normala la axa barei a tuturor forțelor de la stînga secțiunii.

-momentul încovoietor M, pe fața din dreapta a sectiunii, este egal cu suma momentelor, în raport cu centrul de greutate al secțiunii, ale tuturor forțelor exterioare de la stînga secțiunii.

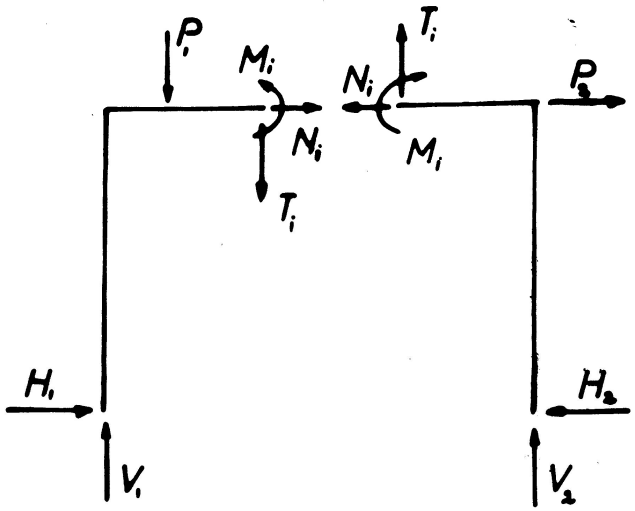


Fig.1.13 Eforturi secţionale

Forţa axiala N este pozitivă cînd produce în bară întindere şi negativă cînd produce în bară compresiune.

Forţa tăietoare T este pozitivă cînd pe faţa din stînga a secţiunii este aplicată de jos în sus, iar pe faţa din dreapta de sus în jos, fiind negativă în caz contrar. Această convenţie pentru forţa tăietoare se mai poate enunţa şi astfel: forţa tăietoare este pozitiva cînd roteşte în sens orar porţiunea de bară pe care se aplică.

Momentul încovoietor M este pozitiv cînd în urma încovoierii produse în bară se întinde o fibră conventional aleasă. La grinzile drepte se consideră ca momentul încovoietor este pozitiv, cînd întinde fibra de jos. La grinzile cotite si cadre pentru a preciza semnul momentului încovoietor se alege obişnuit convenţia ca momentul încovoietor care întinde fibra interioară este pozitiv.

1.12 Relaţii diferentiale între acţiuni si eforturi.

Se consideră o bară dreaptă (fig.1.14) supusă acţiunii unei încărcări distribuite.

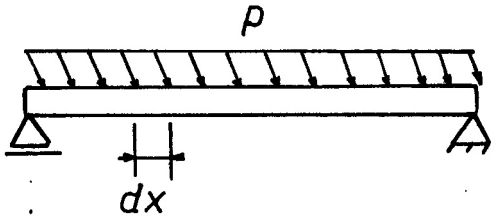


Fig.1.14 Element de bară

Izolînd prin două secţiuni apropiate un element de lungime dx supus la o forţă uniform distribuită, acesta va fi în echilibru sub acţiunea forţei exterioare şi a eforturilor din secţiunile de capăt. Efectul barei îndepărtate pe faţa din stînga a elementului este dat de eforturile M,T,N, iar pe faţa din dreapta M+dM, T+dT si N+dN (fig.1.15).

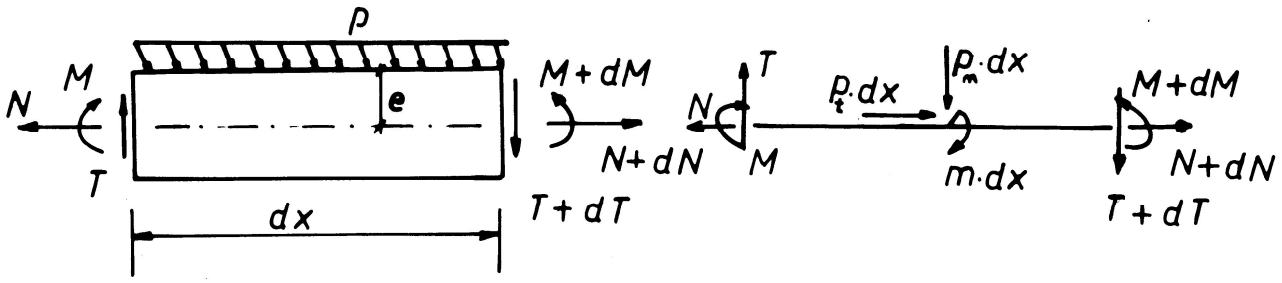


Fig.1.15 Element de bară încărcat cu o forță uniform distribuită

Forța exterioară se consideră o forță uniform distribuită p, înclinată față de axa barei. Forța totală pdx care acționează pe elementul dx se descompune într-o componentă după normala la axa barei $p_n dx$ şi una după axa barei $p_t dx$. Reducînd fortele $p_n dx$ si $p_t dx$ în axa barei se obține şi momentul $mdx = p_t \cdot e \cdot dx$.

Ecuațiile de echilibru static pentru elementul dx sînt:

$$(1.4)\cdots \sum X = -N + (N + dN) + p_t dx = 0$$

$$(1.5)\cdots \sum Y = T - (T + dT) - p_n dx = 0$$

$$(1.6)\cdots (\sum M)_j = M - (M + dM) + Tdx - p_n dx \frac{dx}{2} + mdx = 0$$

În ecuația (1.6) se neglijează termenul $p_n \frac{dx^2}{2}$ ca infinit mic de ordinul 2. Rezolvînd ecuațiile se obține:

$$(1.7)\cdots \frac{dN}{dx} = -p_t$$

$$(1.8)\cdots \frac{dT}{dx} = -p_n$$

$$(1.9)\cdots \frac{dM}{dx} = T + m$$

care sînt relațiile diferențiale între acțiuni si eforturi. Aceste relații sînt valabile pentru structurile static determinate si pentru structurile static nedeterminate, întrucît la deducerea lor nu s-a facut nici o restricție în acest sens. Relatia (1.7) arată că derivata forței axiale într-o sectiune este egală cu intensitatea componentei tangențiale a forței aplicată în secțiune, luată cu semn schimbat. Din relația (1.8) rezultă că derivata forței tăietoare într-o secțiune este egală cu intensitatea componentei normale a forței din secțiune, luată cu semn schimbat.

Derivata momentului încovoietor într-o secțiune este egala cu forța tăietoare din secțiunea respectivă. Daca forța distribuită este normală pe axa grinzii, componentele sînt: $p_n = p; p_t = 0; m = 0$ şi relațiile de mai sus devin:

$$(1.10)\cdots \frac{dN}{dx} = 0; \cdots \frac{dT}{dx} = -p; \cdots \frac{dM}{dx} = T$$

care arată ca forța axială ramîne constantă pe intervalul în care se aplică numai forțe normale pe axa barei. Relațiile diferențiale (1.4) - (1.9) sînt foarte importante la trasarea diagramelor de eforturi, deoarece stabilesc legătura dintre legea de variație a acțiunii şi legile de variație ale diagramelor de eforturi. Astfel, dacă acțiunea variază după legea p=f(x), unde f(x) este o funcție de un anumit grad, forța tăietoare variază dupa o curbă cu un grad superior funcției f(x), iar curba ce defineşte momentul încovoietor are un grad în plus față de forța tăietoare, respectiv două grade mai mult decît f(x).

Concluzii:

-dacă o porțiune de bară nu este supusă la nici o acțiune forța tăietoare este constantă deoarece dT/dx=0, iar momentul încovoietor variază liniar

-dacă asupra barei acționează o forță uniform distribuită, forța tăietoare variază liniar şi momentul încovoietor după o parabolă de gradul doi.

-în cazul unei forțe concentrate normale pe axa barei, forța tăietoare face un salt egal cu mărimea forței, în sensul de acționare al acesteia, ca urmare în diagrama de moment încovoietor, înclinarea tangentei la curbă se schimbă brusc şi apare un vîrf.

-în secțiunile în care forța tăietoare este nulă sau trece prin valoarea zero, momentul încovoietor are o valoare extremă, fiind maxim sau minim.

-cînd forța tăietoare face un salt, în diagrama de moment încovoietor panta tangentei la curbă se schimbă brusc şi în diagramă apare un vîrf.

-pe intervalele unde forța tăietoare este pozitivă, momentul încovoietor creşte, iar unde forța tăietoare este negativă momentul încovoietor descreşte

-în punctele în care distribuția acțiunilor are ordonate nule, diagrama de forță tăietoare are ordonate maxime, iar în diagrama de momente sînt puncte de inflexiune.

CAP. 2. GRINZI DREPTE STATIC DETERMINATE

2.1 Încărcări pe grinzi drepte static determinate

-Bara simplu rezemată la capete, încărcată cu o forță înclinată.

Cazul acesta este prezentat în figura 2.1. Componenta orizontală a forței F produce forțe axiale N, iar componenta verticală dă forțe tăietoare T şi momente încovoietoare M.
Calculul reacțiunilor folosind ecuații de echilibru static:

$$\sum X_i = 0 \rightarrow H_1 - F\cos\alpha = 0 \rightarrow H_1 = F\cos\alpha$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow F\sin\alpha \cdot \frac{l}{2} - V_2 \cdot l = 0 \rightarrow V_2 = \frac{1}{2}F\sin\alpha$$

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot l - F\sin\alpha \cdot \frac{l}{2} = 0 \rightarrow V_1 = \frac{1}{2}F\sin\alpha$$

Pentru a construi diagrama de forțe axiale, se ia o secțiune oarecare,între 1 şi 3, în care:

$$N_x = N_{13} = -H_1 = -F\cos\alpha$$

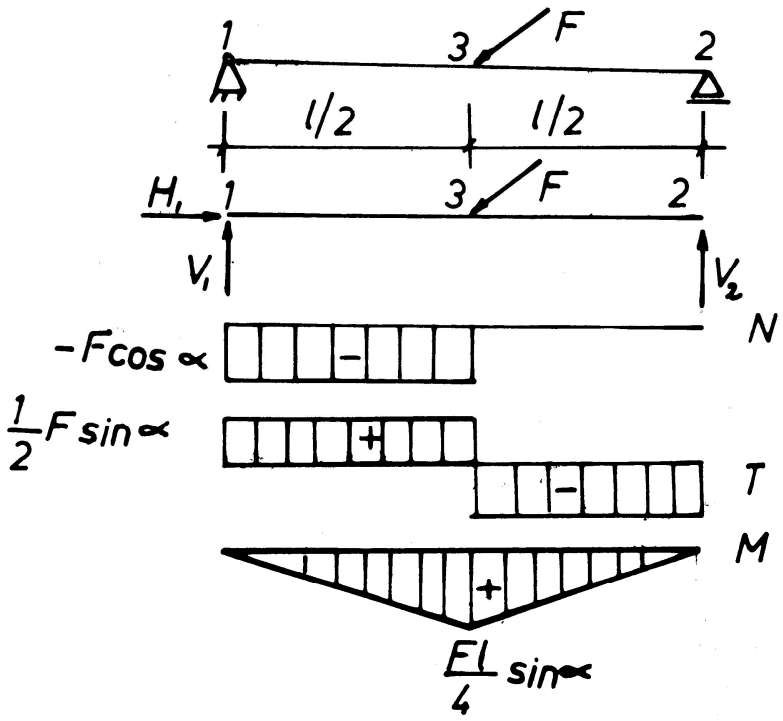


Fig.2.1 Diagrame de eforturi pentru o bară simplu rezemată

Pe intervalul 1-3, forța axială este constantă, şi are ca efect compresiunea barei. Pe al doilea interval ea este nulă.
Diagrama de forță tăietoare se deschide cu reacțiunea V_1, este constantă pînă în punctul de aplicație al forței concentrate unde are loc un salt pînă la $-\frac{1}{2}F\sin\alpha$. În continuare este constantă pînă în dreptul reazemului unde se închide cu reacțiunea V_2.

Diagrama de moment încovoietor pleacă de la valoarea zero în articulația 1, are o variație liniară pînă în punctul de aplicație al forței concentrate,punct în care diagrama prezintă un maxim. Pe următorul tronson diagrama are variație liniară şi se închide în zero în punctul de rezemare 2.

-Bara simplu rezemată cu o forță uniform distribuită

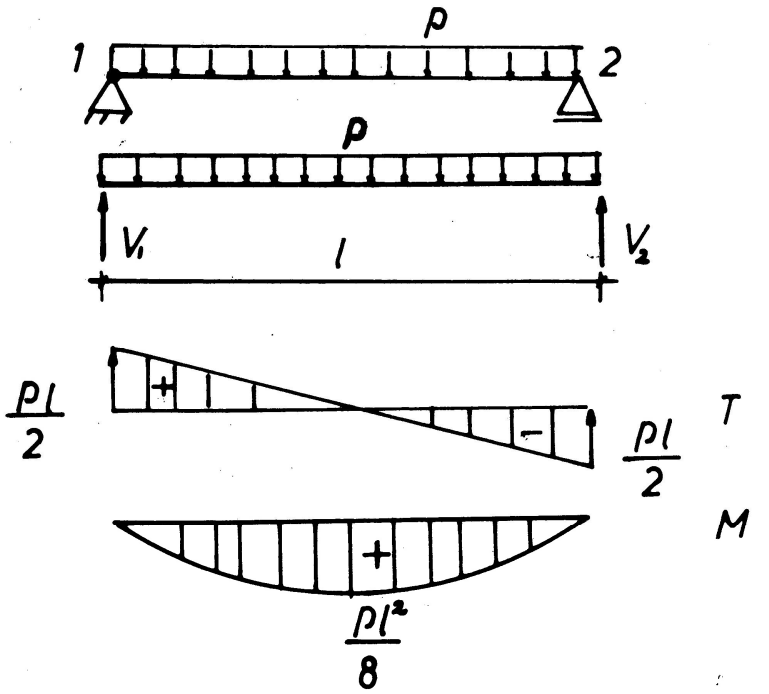


Fig.2.2 Diagrame de eforturi pentru o bară simplu rezemată încărcată cu o forță distribuită

Bara din figura 2.2 este încărcată cu o forță uniform distribuită, verticală, de sus în jos. Forța totală aplicată barei este F=pl iar reacțiunile din motive de simetrie,

$V_1 = V_2 = pl/2$

Într-o secțiune x, forța tăietoare este

$T_x = V_1 - px = p(l/2 - x)$, deci variație liniară, expresia fiind valabilă pe tot lungul barei. Pe reazeme forța tăietoare este:

în 1 la x=0, $T_1 = \frac{pl}{2} = V_1$; în 2, la x=l, $T_2 = -\frac{pl}{2} = -V_2$

Adăugînd în 2, forța concentrată V_2 diagrama de forțe tăietoare se închide.

Într-o secțiune x, momentul încovoietor este:

$$M_x = V_1 \cdot x - px\frac{x}{2} = \frac{p}{2}x(l - x)$$

Momentul încovoietor se anulează la capete, la x=0 şi x=l şi este maxim în mijloc (unde forța tăietoare este nulă) la x=l/2. $M_{\max} = \frac{pl}{4}\left(l - \frac{l}{2}\right) = \frac{pl^2}{8}$

Se constată că forța tăietoare variază liniar, iar momentul încovoietor variază parabolic, ambele avînd cîte o singură expresie pe toată lungimea barei.

-Bara cu un sistem oarecare de forțe concentrate.

La bara din fig.2.3 se determină în prealabil reacțiunile scriind ecuațiile de echilibru static:

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow F \cdot a + F(l - a) - V_2 \cdot l = 0 \rightarrow V_2 = F$$

$\sum M_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot l - F \cdot (l - a) - F \cdot a = 0 \rightarrow V_1 = F$

după care se construiesc diagramele T,M. Diagrama de forțe tăietoare se deschide cu V_1=F, constantă pînă în punctul de aplicație al forței concentrate, nulă în continuare, apoi salt iar în punctul de aplicație al forței concentrate,constantă şi se închide în reazem.

Se observă că pe intervalul dintre cele două sarcini F forța tăietoare este nulă, deci momentul încovoietor este constant. Se zice că pe acest interval bara este solicitată la încovoiere pură.

Dacă o bară este simetrică față de mijlocul ei, încărcarea este simetrică, diagrama de momente încovoietoare este, de asemenea, simetrică, iar cea de forțe tăietoare este antisimetrică (în punctele simetrice, forțele tăietoare sînt egale dar de semne contrare).

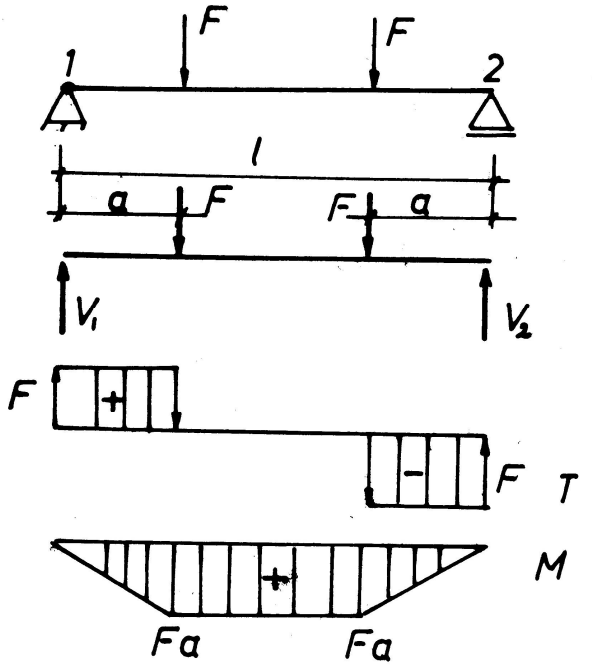


Fig.2.3 Bara cu un sistem de forțe concentrate

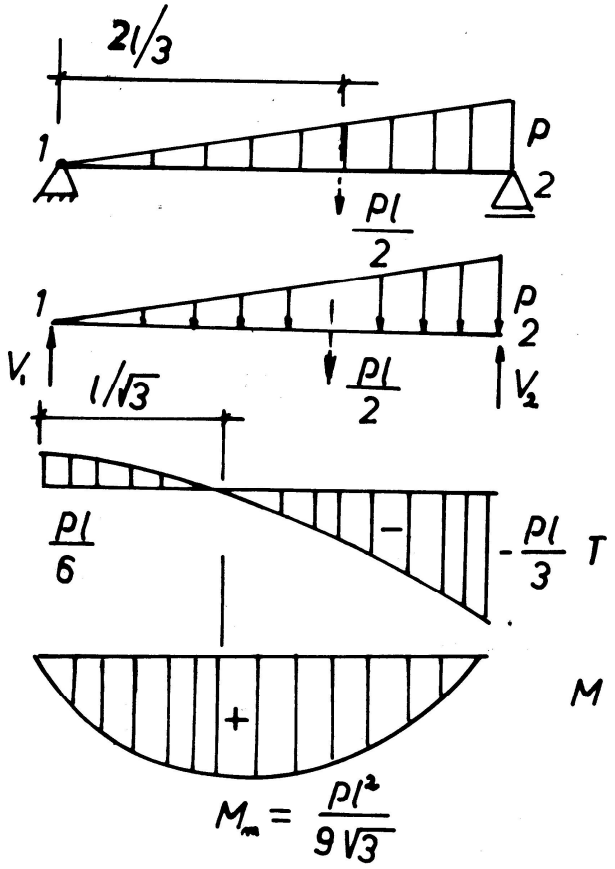


Fig.2.4 Bara cu sarcină triunghiulară

-Bara cu forță distribuită liniar

La bara din fig.2.4 , cu o forță variind liniar de valoare maximă p, încărcarea totală este F=pl/2. Considerînd acestă încărcare aplicată în centrul de greutate al triunghiului de încărcare, se pot determina reacțiunile scriind ecuațiile de condiție:

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow \frac{pl}{2} \cdot \frac{2}{3} l - V_2 \cdot l = 0 \rightarrow V_2 = \frac{pl}{3}$$

$$\sum M_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot l - \frac{pl}{2} \cdot \frac{l}{3} = 0 \rightarrow V_1 = \frac{pl}{6}$$

Într-o secțiune oarecare x, forța distribuită are intensitatea:

$$p_x = \frac{x}{l} p$$

Se pot determina expresiile pentru calculul momentului încovoietor sau a forței tăietoare în orice secțiune:

$$T_x = V_1 - p_x \cdot \frac{x}{2} = \frac{pl}{6} - \frac{px^2}{2l}$$

$$M_x = V_1 \cdot x - p_x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{plx}{6} - \frac{px^3}{6l}$$

-Bare simplu rezemate încărcată cu momente concentrate

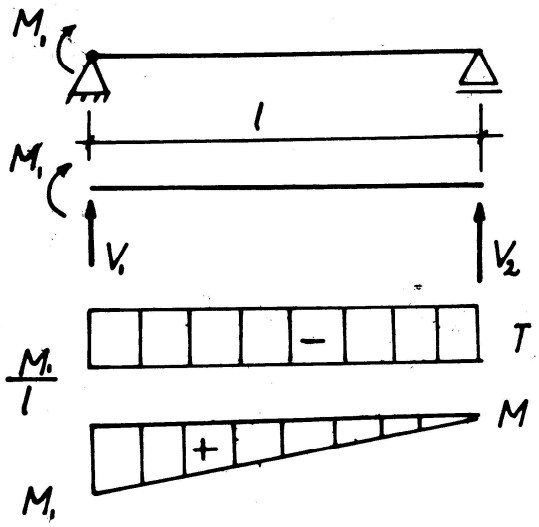


Fig.2.5 Bară cu momente concentrate

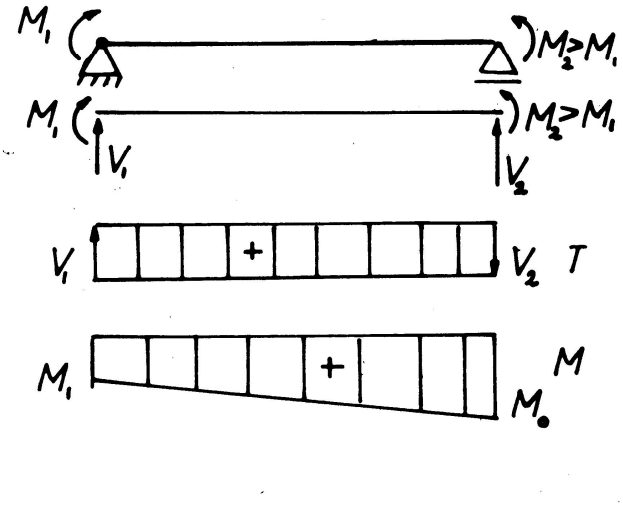


Fig.2.6 Bară cu momente concentrate

Bara din fig. 2.5 încărcată cu un moment concentrat pe reazem, are reacțiunile egale şi de sens contrar, $V_1=V_2=M_1/l$. Forța tăietoare este constantă pe toată bara, iar momentul încovoietor variază liniar. La bara din fig.3.8 cu două momente pe reazeme, dacă $M_2>M_1$, rezultă $V_1>0$,iar momentul încovoietor crește mereu, de la M_1 la M_2

-Bare în consolă

Pentru barele în consolă (bare încastrate la un capăt şi libere la celălalt), regulile stabilite pînă aici rămîn valabile. În reazemul încastrat există un cuplu, deci diagrama de momente încovoietoare începe cu valoarea acestui cuplu.

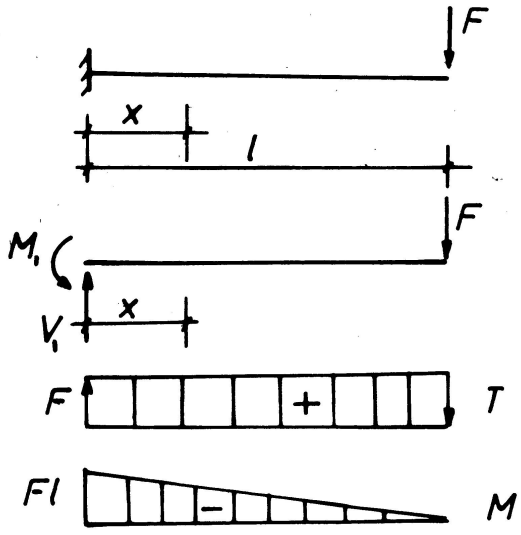


Fig.2.7 Bară în consolă

La bara din figura 2.7 , ecuațiile de echilibru dau reacțiunile: $V_1 = F; M_1 = Fl$. Forța tăietoare este constantă, pozitivă. Momentul încovoietor într-o secțiune oarecare este:

$M_x = -M_1 + V_1 x = -Fl + Fx$

deci variază liniar, fiind M=Fl în încastrare şi nul în capătul liber.

2.2Relațiile de recurență

În problemele practice este necesar să se exprime eforturile dintr-o secțiune, în funcție de eforturile din secțiunea precedentă şi de forțele cuprinse între cele două secțiuni. Pentru a stabili aceste expresii se porneşte de la relațiile diferențiale între eforturi şi încărcări care se integrează pe intervalul dintre cele două secțiuni obținîndu-se:

(2.1) $\int_j^k dT = -\int_j^k p \cdot dx \;;\; T_k = T_j - \int_j^k p dx = T_j - P_{jk}$

$\int_j^k dM = \int_j^k T dx \;;\; M_k = M_j + \int_j^k T dx = M_j + \omega_{jk}^T$

Din relațiile (2.1) rezultă că forța tăietoare din secțiunea k este egală cu forța tăietoare din secțiunea j, din care se scad forțele normale pe axa barei cuprinse între cele două secțiuni. Momentul încovoietor în secțiunea k este egal cu momentul încovoietor în secțiunea j, la care se adună suprafața diagramei de forță tăietoare cuprinsă între cele două secțiuni(fig.2.8).

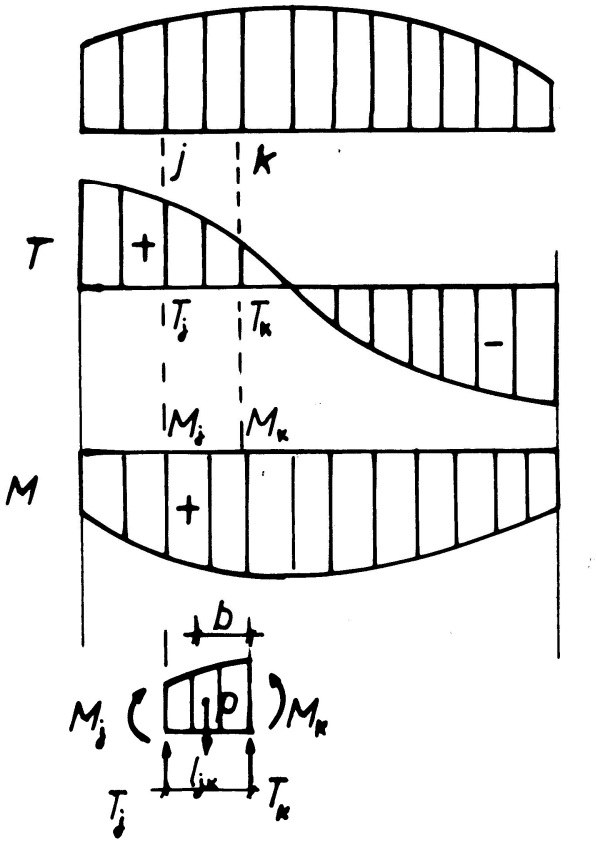


Fig.2.8 Variația diagramelor de eforturi T şi M pentru o încărcare uniform distribuită cu variație neliniară. Separarea unui element de lungime l_{jk}

O altă formă de exprimare a relațiilor de recurență între eforturi se poate scrie dacă se izolează o porțiune de bară j-k şi la capete se aplică eforturile corespunzătoare (fig.2.8).
Din ecuația de echilibru a momentului se obține:

$(2.2)\ldots M_k = M_j + T_j l_{jk} - P_{jk} b$

care arată că momentul încovoietor din secțiunea k este egal cu momentul încovoietor din secțiunea j, la care se adaugă momentul forței tăietoare din secțiunea j şi momentul forței aplicate pe bară între cele două secțiuni, în raport cu centrul de greutate al secțiunii k.

Exemplul 1:

Se consideră grinda în consolă din fig.2.9 încarcată cu forța concentrată şi forță uniform distribuită. Se cere calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de eforturi.
Reacțiunile se calculează din ecuațiile de echilibru static pe grinda în ansamblu. Eforturile într-o secțiune curentă se determină folosind metoda secțiunilor, scriind echilibrul părții din stînga sau din dreapta secțiunii.

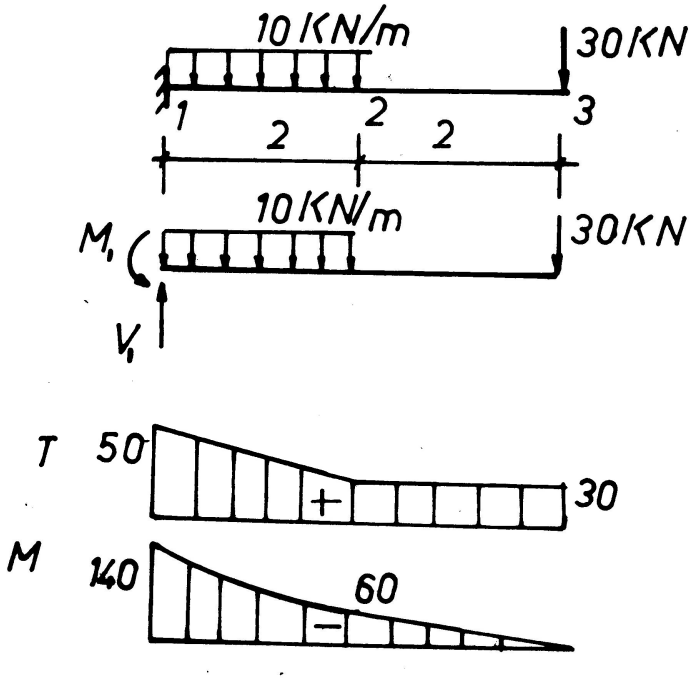


Fig.2.9 Grindă în consolă

Determinarea reacțiunii V_1 din ecuația de proiecție pe verticală:

$\sum Y_i = 0 \rightarrow V_1 - 10 \cdot 2 - 30 = 0 \rightarrow V_1 = 50KN$

Determinarea momentului în încastrare M_1 printr-o sumă de momente în raport cu punctul 1:

$(\sum M)_1 = 0 \rightarrow M_1 = 140\text{KNm}$

$-M_1 = 10 \cdot 2 \cdot 1 + 30 \cdot 4 = 140\text{KNm}$

$M_2 = -60$

Diagrama de forță taietoare se deschide cu reacțiunea $V_1 = 50KN$ după care are o variație liniara ca urmare a încărcării uniform distribuite. În continuare ramîne constantă , iar în final se închide cu forța concentrată de 30KN.

Diagrama de moment se trasează de la stînga spre dreapta. Diagrama de moment încovoietor se deschide cu valoarea de –140KNm în punctul 1 după care are o variație parabolică din încărcarea uniform distribuită ajungînd la valoarea –60 în punctul 2. Din punctul 2 în punctul 3 diagrama de

moment încovoietor are o variație liniară deoarece forța tăietoare este constantă. Valoarea momentului încovoietor este zero în capătul liber de consolă.

Exemplul 2: Pentru grinda în consolă din figura 2.10 se cere calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de moment.
Reacțiunile se calculează din ecuațiile de echilibru static pe structura în ansamblu.
Reacțiunea V_1 se obține printr-o ecuație de proiecție pe verticală: $\sum Y_i = 0 \rightarrow V_1 = 60KN$
Realizînd o sumă de momente în punctul 1 se obține momentul din încastrare.
$(\sum M)_1 = 0 \rightarrow -M_1 = 40 \cdot 1{,}5 + 20 \cdot 3$
$M_1 = 120$

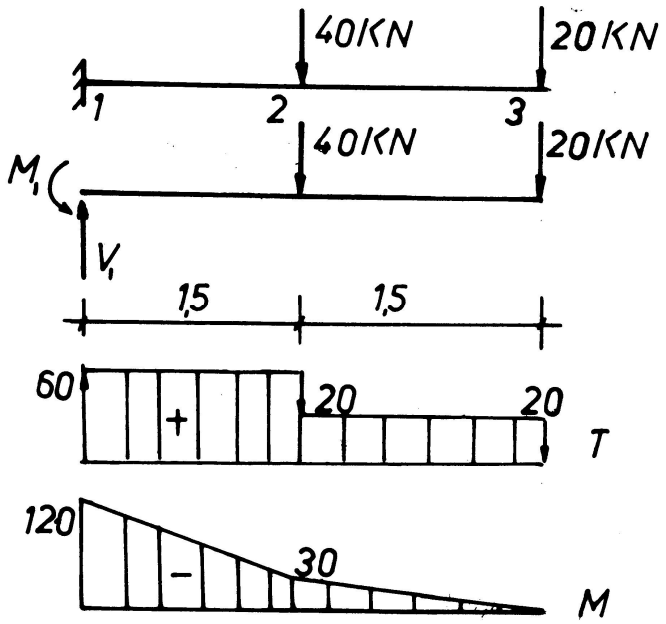


Fig.2.10 Bară în consolă

Diagrama de forță tăietoare se deschide cu V_1=60KN, pe intervalul 1-2 este constantă, în punctul 2 are un salt din forța concentrată de 40KN, pe intervalul 2-3 este constantă după care în punctul 3 se închide cu forța concentrată de 20KN.
Se observă că pe intervalul 2-3 panta diagramei de moment este mai mică decît pe intervalul 1-2 deoarece pe intervalul 2-3 forța tăietoare este mai mică decît pe intervalul 1-2.

Exemplul 3: Pentru grinda în consolă din figura 2.11 se cere calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de moment.
Reacțiunea V_1 se obține dintr-o ecuație de proiecție pe verticală iar momomentul M_1 printr-o sumă de momente în punctul 1.
$\sum Y_i = 0 \rightarrow V_1 - 20 \cdot 3 - 30 = 0 \rightarrow V_1 = 90KN$
$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow -M_1 + 20 \cdot 3 \cdot 1{,}5 + 30 \cdot 3 = 0$
$M_1 = 180KNm$

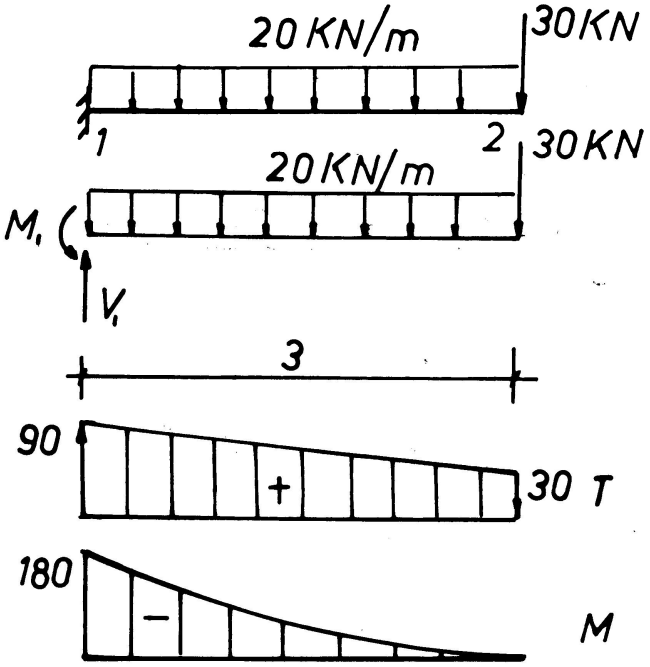


Fig.2.11 Diagrame de eforturi pentru bară în consolă

Diagrama de forță tăietoare se deschide cu V_1=90KN după care are o variație liniară datorită încărcării uniform distribuite pînă în punctul 2 unde diagrama se închide cu forța concentrată de 30KN.
Diagrama de moment se deschide cu M_1=-180KNm, are o variație parabolică pe intervalul 1-2, iar în capătul liber de consolă valoarea este zero.
Datorită faptului că forța tăietoare este descrescătoare de la stînga spre dreapta atunci diagrama de moment încovoietor este concavă (ține apa).

Exemplul 4: Pentru grinda în consolă din figura 2.12 se cere calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de moment.

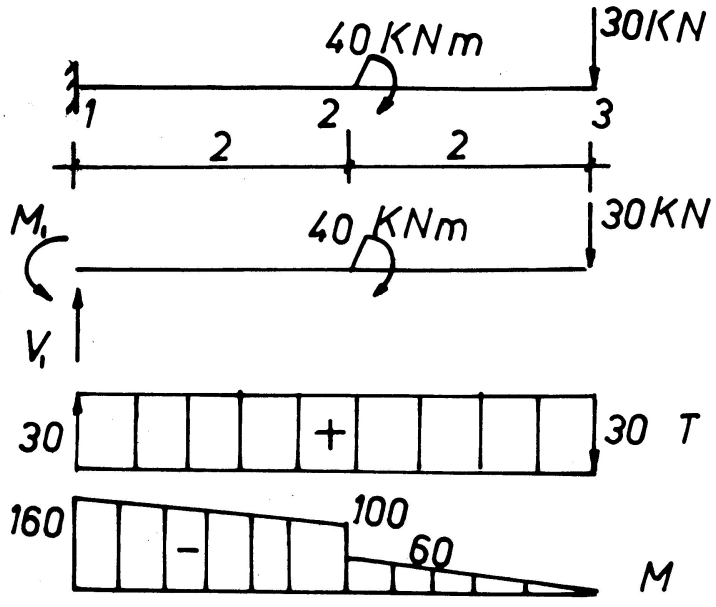


Fig. 2.12 Diagrame de eforturi

Reacțiunea V_1 o obținem printr-o ecuație de echilibru pe verticală.

$\sum Y_i = 0 \rightarrow V_1 - 30 = 0 \rightarrow V_1 = 30KN$

Momentul M_1 se obține printr-o sumă de momente în punctul 1.

$\sum M_1 = 0 \rightarrow -M_1 + 40 + 30 \cdot 4 = 0$

$M_1 = 160KNm$

Diagrama de forță tăietoare se deschide cu V_1=30KN, este constantă pînă în punctul 3 cînd se închide cu forța concentrată de 30KN.

Diagrama de moment se se de schide cu –160 , are o variație liniară pînă în punctul 2 unde apare un salt datorită momentului concentrat. Pe intervalul 2-3 diagrama de moment are tot variație liniară iar în capătul liber de consolă momentul este zero.

Exemplul 5: Să se determine reacțiunile şi să se traseze diagrama de forță tăietoare şi moment pentru grinda dreaptă simplu rezemată din figura 2.13.

Reacțiunea V_2 se determină printr-o sumă de momente în punctul 1.

$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow 15 \cdot 4 \cdot 2 - V_2 \cdot 10 = 0$

$V_2 = 12KN$

Reacțiunea V_1 se determină printr-o sumă de momente în raport cu punctul 2.

$\sum M_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 10 - 15 \cdot 4 \cdot 8 = 0 \rightarrow$

$V_1 = 48KN$

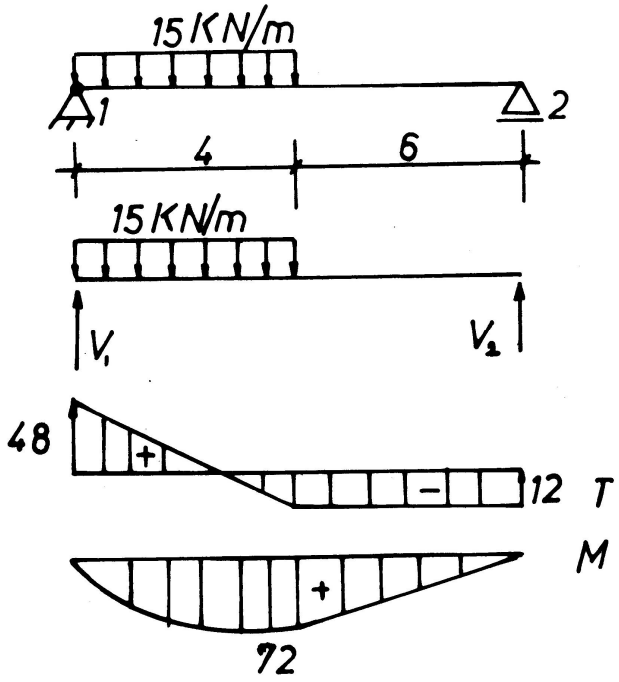


Fig.2.13 Diagrame de eforturi

$M_3 = 48 \cdot 4 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 72$

$x = \frac{T}{15} = \frac{48}{15} = 3{,}2m$

$M_{max} = \frac{1}{2} \cdot 3{,}2 \cdot 48 = 76{,}8$

Momentul în punctul 3 se obține făcînd suma momentelor tuturor forțelor din stînga secțiunii față de secțiunea 3.
Momentul maxim se obține calculînd aria triunghiului format de reacțiunea V_1 şi abscisa pînă în punctul de anulare al forței tăietoare.
Diagrama de forță tăietoare se deschide cu V_1=48KN , urmează o variație liniară pînă în punctul 3 unde se ajunge la –12KN. În continuare diagrama este constantă pînă în punctul 2 unde se închide cu V_2=12KN.
Diagrama de moment pleacă de la zero din articulația 1, are o variație parabolică pînă în 3 cu un maxim în punctul de anulare al forței tăietoare. Din 3 pînă în 2 diagrama de moment este liniară ajungînd în articulația 2 la zero.

Exemplul 6: Să se determine reacțiunile şi să se traseze diagramele de eforturi pentru grinda dreaptă simplu rezemată din figura 2.14

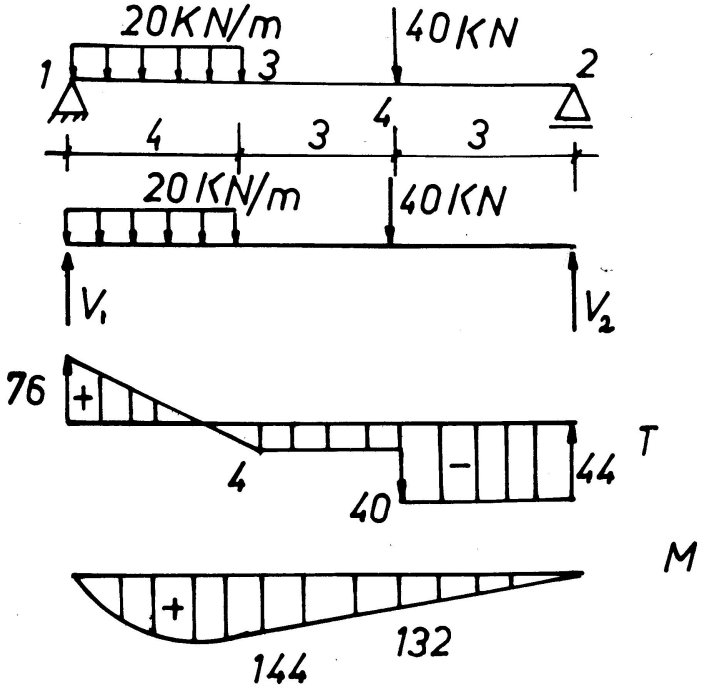


Fig.2.14 Diagrame de eforturi

Reacțiunea V_1 se obține printr-o sumă de momente în punctul 2 iar reacțiunea V_2 printr-o sumă de momente în punctul 1.

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 10 - 20 \cdot 4 \cdot 8 - 40 \cdot 3 = 0$$

$$V_1 = 76KN$$

$$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow 20 \cdot 4 \cdot 2 + 40 \cdot 7 - V_2 \cdot 10 = 0$$

$$V_2 = 44KN$$

$$M_3 = 76 \cdot 4 - 20 \cdot 4 \cdot 2 = 144$$

$$M_4 = 76 \cdot 7 - 20 \cdot 4 \cdot 5 = 132$$

Diagrama de forță tăietoare se deschide cu V_1=76KN deasupra axei barei, are o variație liniară pînă în 3 din încărcarea uniform distribuită unde ajunge la –4 . În continuare diagrama este constantă pînă în 4 unde are loc un salt datorită forței concentrate de 40KN. Pe intervalul 4-2 forța tăietoare este constantă, iar în 2 se închide cu V_2=44KN.

Diagrama de moment este parabolică pe intervalul 1-3 datorită încărcării uniform distribuite, pe intervalul 3-4 este liniară, la fel şi pe intervalul 4-2.

Exemplul 7: Să se determine reacțiunile şi să se traseze diagramele de eforturi pentru grinda dreaptă simplu rezemată din fig.2.15.
Reacțiunea V_1 se obține printr-o sumă de momente în punctul 2 iar reacțiunea V_2 printr-o sumă de momente în punctul 1.

$$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow 0 = 60 \cdot 4 + 40 \cdot 9 - V_2 \cdot 12$$
$$V_2 = 50KN$$
$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 12 - 60 \cdot 8 - 40 \cdot 3 = 0$$
$$V_1 = 50KN$$
$$M_4 = 50 \cdot 9 - 6 \cdot 5 = 150KNm$$

Diagrama de forță tăietoare se deschide cu V_1=50KN, este constantă pe intervalul 1-3, în punctul 3 are loc un salt din forța concentrată de 60KN apoi pe

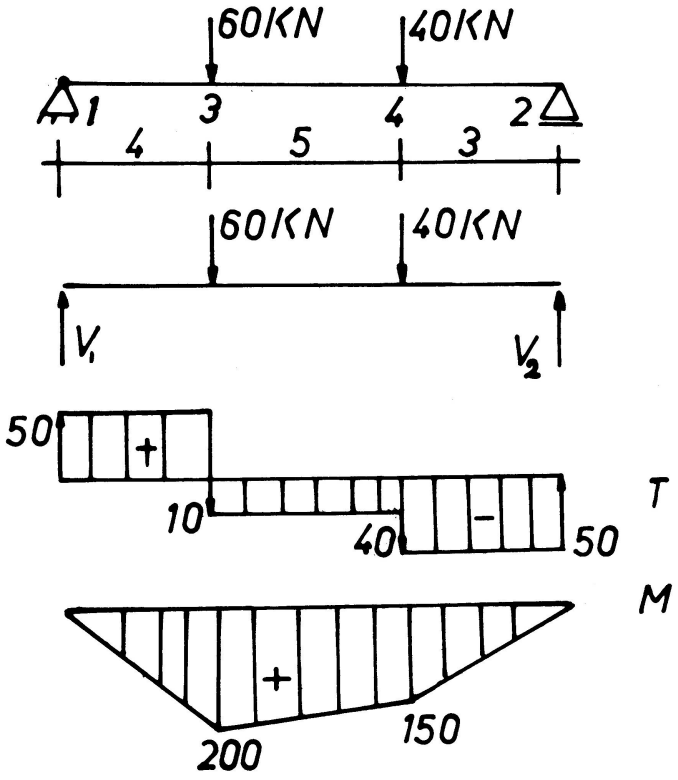


Fig.2.15 Diagrame de eforturi

intervalul 3-4 forța tăietoare este constantă , în punctul 4 are loc un salt din forța concentrată de 40KN, iar în 2 se închide cu V_2=50KN.
Momentul în punctul 3 se obține scriind suma momentelor forțelor de la dreapta secțiunii 3:
$M_3 = V_1 \cdot 4 = 200KNm$.

Exemplul 8: Să se determine reacțiunile şi să se traseze diagramele de eforturi pentru grinda dreaptă simplu rezemată din figura 2.16.

Reacțiunea V_1 se obține printr-o sumă de momente în punctul 2 iar reacțiunea V_2 printr-o sumă de momente în punctul 1.

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow -180 + V_1 \cdot 9 - 15 \cdot 6 \cdot 3 = 0$$
$$V_1 = 50KN$$
$$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow -180 + 15 \cdot 6 \cdot 6 - V_2 \cdot 9 = 0$$
$$V_2 = 40KN$$
$$M_3 = -180 + 50 \cdot 3 = -30$$

Diagrama de forță tăietoare se deschide cu V_1=50KN, pe intervalul 1-3 este constantă deoarece acest interval este neîncărcat; pe intervalul 3-2 forța tăietoare are variație liniară iar în 2 se închide cu V_2=40KN.
Diagrama de moment se deschide cu valoarea de –180KNm deoarece avem de-a face cu un moment concentrat în articulație, urmează o variație
liniară pe intervalul 1-3 , în punctul 3 momentul avînd valoarea –30KNm. Pe intervalul 3-2 diagrama de moment este parabolică cu un moment maxim în punctul de anulare al forței tăietoare şi cu valoarea zero în articulația 2.

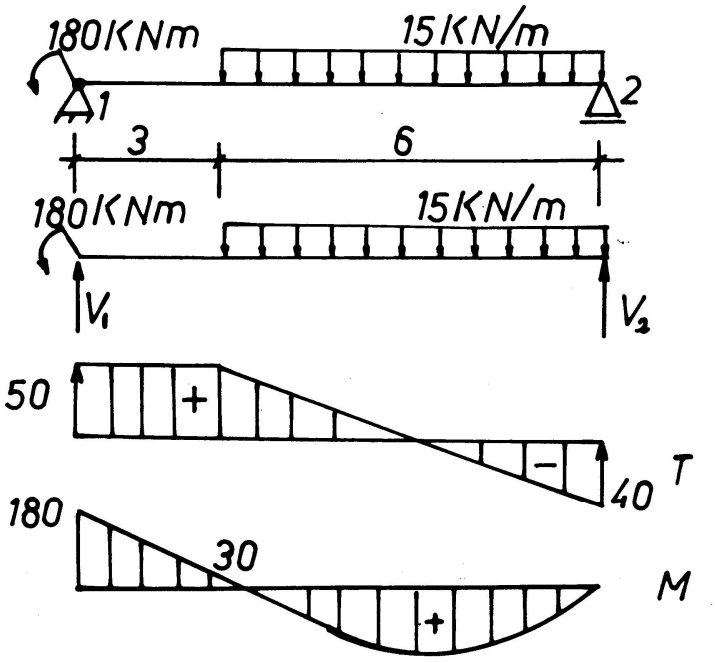


Figura 2.16 Diagrame de eforturi

Exemplul 9: Să se determine reacțiunile şi să se traseze diagramele de eforturi pentru grinda dreaptă simplu rezemată din figura 2.17
Reacțiunea V_1 se obține printr-o sumă de momente în punctul 2 iar reacțiunea V_2 printr-o sumă de momente în punctul 1.

$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow 60 \cdot 3 + 60 \cdot 6 - V_2 \cdot 9 + 360 = 0$

$V_2 = 100KN$

$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 9 - 60 \cdot 6 - 60 \cdot 3 + 360 = 0$

$V_1 = 20KN$

$M_4 = 20 \cdot 6 - 60 \cdot 3 = -60$

Diagrama de forță tăietoare se deschide cu valoarea de 20KN deasupra axei barei, este constantă pe intervalul 1-3, în punctul 3 are loc un salt datorită forței concentrate de 60KN, forța tăietoare ajungînd la –40KN sub axa barei. Pe intervalul 3-4 forța tăietoare este constantă, în punctul 4 are loc un salt datorită forței concentrate de 60KN. Pe intervalul 4-2 forța tăietoare este constantă iar în 2 se închide cu reacțiunea V_2=100KN.

Diagrama de moment încovoietor prezintă particularitatea că în punctul 2 are un salt egal cu valoarea momentului concentrat de 360KNm.

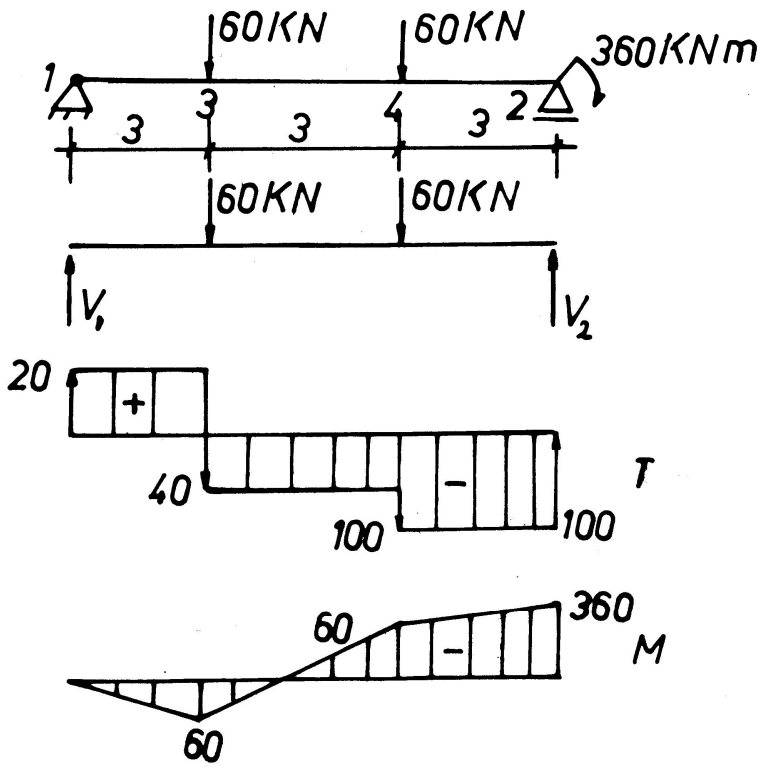


Fig.2.17 Diagrame de eforturi

Exemplul 10: Să se determine reacțiunile şi să se traseze diagramele de eforturi pentru grinda dreaptă simplu rezemată din figura 2.18.

$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow 15 \cdot 8 \cdot 4 - V_2 \cdot 6 = 0$

$V_2 = 80KN$

$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 6 - 15 \cdot 6 \cdot 3 + 15 \cdot 1 \cdot 2 = 0$

$V_1 = 40KN$

$T_{21} = 50 - 15 \cdot 6 = -40$

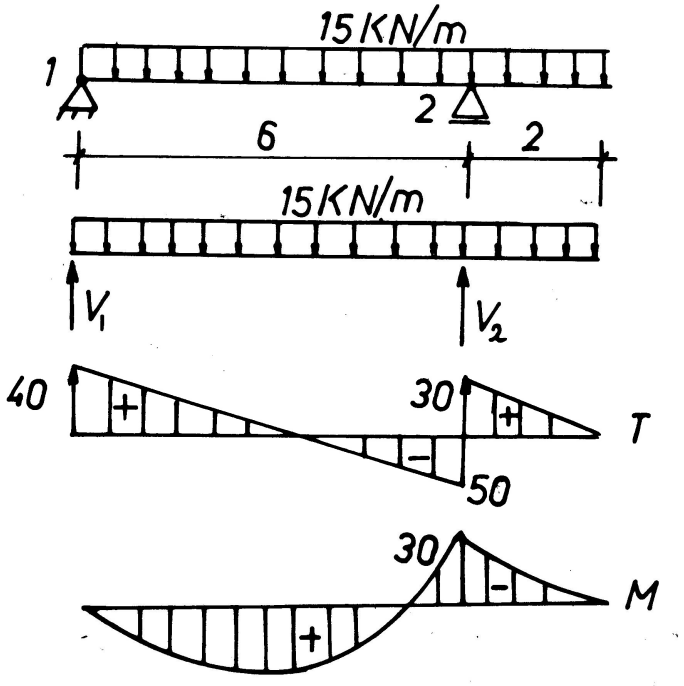


Fig.2.18 Diagrame de forță tăietoare şi moment

Diagrama de forță tăietoare se deschide cu reacțiunea V_1=40KN după care urmează o variație liniară datorită încărcării uniform distribuite, diagrama de forță tăietoare fiind descrescătoare pînă în punctul 2 unde apare un salt din forța concentrată V_2=80KN pînă la 30KN. Urmează apoi o variație liniară datorită încărcării uniform distribuite pînă în capătul liber de consolă unde se ajunge la zero.Diagrama de moment are o variație parabolică pe intervalul 1-2 datorită încărcării uniform distribuite , şi prezintă un maxim în punctul de anulare al forței tăietoare.

Exemplul 11: Să se determine reacțiunile şi să se traseze diagramele de eforturi pentru grinda dreaptă simplu rezemată din figura 2.19.

$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow$

$-45 + 20 \cdot 3 \cdot 6{,}5 - V_2 \cdot 8 = 0$

$V_2 = 43{,}1KN$

$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow$

$-45 + V_1 \cdot 8 - 20 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 0$

$V_1 = 16{,}9KN$

$M_4 = -45 + 16{,}9 \cdot 5 = 39{,}5KNm$

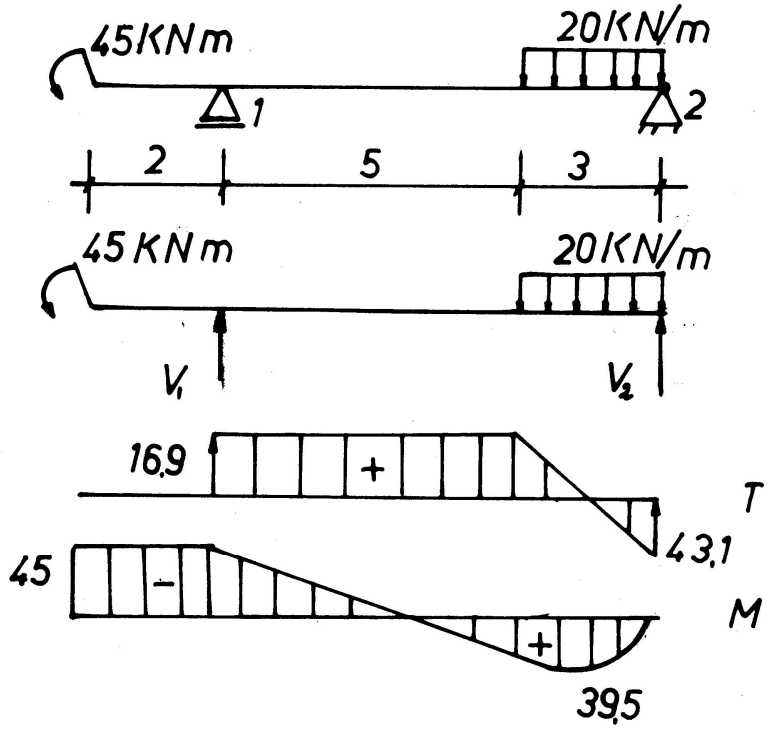


Fig.2.19 Diagrame T,M

Pe lungimea consoloi forța tăietoare este zero deoarece nu există încărcări normale pe axa barei pe această porțiune. Diagrama de forță tăietoare se deschide în punctul 1 cu valoarea reacțiunii V_1=16,9KN. În continuare diagrama de forță tăietoare este constantă pînă cînd începe să acționeze încărcarea uniform distribuită, urmează apoi o variație liniară, diagrama închizîndu-se în 2 cu reacțiunea V_2=43,1KN.

Diagrama de moment prezintă un salt în capătul liber de consolă datorită momentului concentrat, fiind constantă pe lungimea consolei.Pe porțiunea aplicării încărcării uniform distribuite diagrama este poarabolică cu un maxim în punctul de anulare al forței concentrate.

2.3 Grinzi cu console si articulatii (grinzi Gerber)

Grinzile cu console şi articulații sînt structuri static determinate alcătuite din mai multe grinzi legate între ele prin articulații. Aceste grinzi pot fi privite şi ca grinzi continue la care nedeterminarea statică este înlăturată prin introducerea unui număr corespunzător de articulații intermediare.

Grinzile cu console şi articulații se folosesc în special ca structuri de rezistență la poduri. Ele prezintă avantaje deosebite atunci cînd există pericolul tasării unor reazeme, situație în care dacă structura este static nedeterminată iau naştere eforturi suplimentare importante.

La structurile static determinate, deplasările de reazeme conduc la modificarea configurației structurii, fără ca barele care o alcătuiesc să se deformeze. În schimb la structurile static nedeterminate aceste deplasări provoacă şi deformarea structurii deci apariția eforturilor.

În funcție de legăturile pe care grinzile componente le au cu baza de susținere ele reprezintă grinzi principale şi grinzi secundare. Grinzile principale sînt acele grinzi care pot transmite integral la baza de susținere, prin reazemele proprii, toate încărcarile ce le revin.

Distribuirea grinzilor principale şi secundare trebuie să asigure invariabilitatea geometrică a ansamblului.

Rezolvarea se face începînd cu grinzile secundare,iar reacțiunile obținute se transmit pe grinzile principale egale şi de sens contrar.

Exemplul 1:

Să se determine reacțiunile şi să se traseze diagramele de eforturi pentru grinda Gerber din figura 2.20. Grinda respectivă se împarte în structură principală şi structură secundară.
În cazul de față grinda 1-3 reprezintă grinda principală iar grinda 3-4 grinda secundară. Întîi se rezolvă grinda secundară, iar reacțiunile obținute în nodul 3 pe grinda secundară se transmit pe grinda principală egale şi de sens contrar.

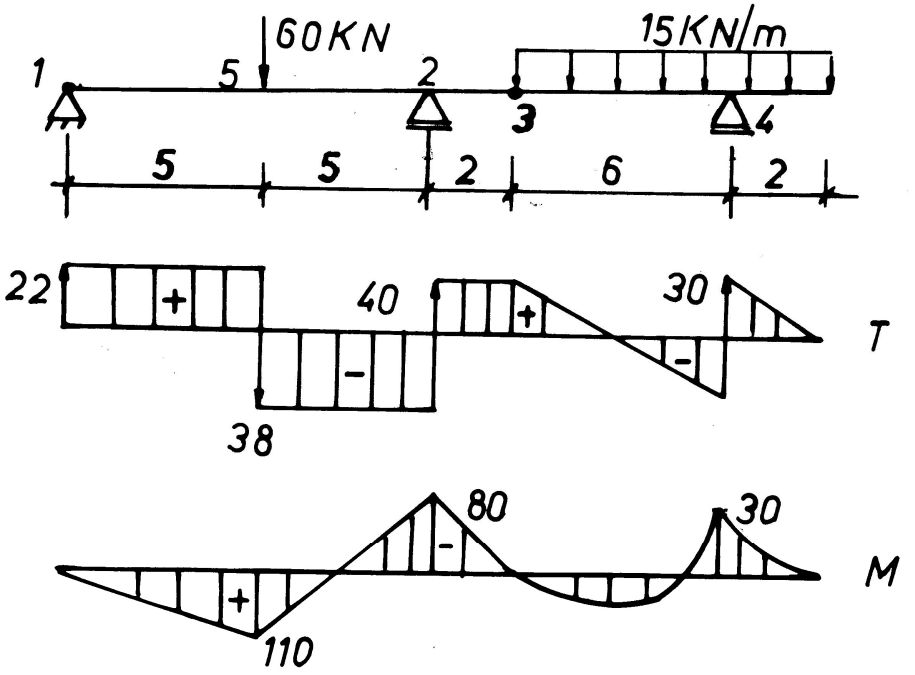


Fig.2.20 Diagrame de eforturi pentru o grindă Gerber

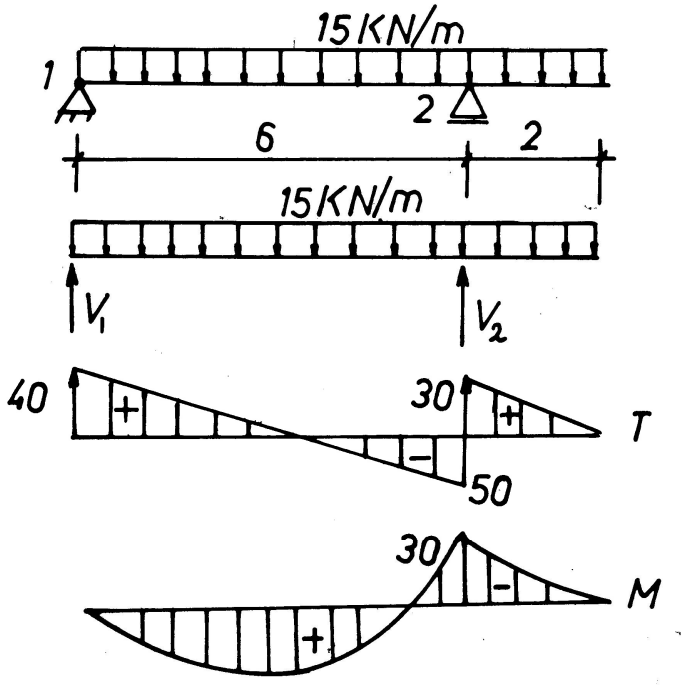


Fig.2.21 Diagrame de eforturi pentru grinda

Secundară 3-4

Calculul începe cu determinarea reacțiunilor grinzii secundare (fig.2.21)folosind ecuațiile de echilibru static:

$\left(\sum M\right)_4 = 0 \rightarrow V_3 = 40KN$

$\left(\sum M\right)_3 = 0 \rightarrow V_4 = 80KN$

Diagrama de forță tăietoare se deschide
cu reacțiunea V_3=40KN, urmează o variație liniară din încărcarea uniform distribuită pînă îndreptul reazemului 4 cînd apare un salt datorită reacțiunii V_4 pînă la 30KN. În continuare diagrama are o variație liniară din încărcarea uniform distribuită, închizîndu-se în zero în capătul liber de consolă.

Diagrama de moment are o variație parabolică cu un maxim în dreptul punctului de anulare al forței tăietoare. Valoarea pe reazem este negativă de –30KNm.

Urmează apoi determinarea reacțiunilor grinzii principale (fig.2.22) prin ecuații de echilibru static.

$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow$

$V_1 \cdot 10 - 60 \cdot 5 + 40 \cdot 2 = 0$

$V_1 = 22KN$

$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow$

$60 \cdot 5 - V_2 \cdot 10 + 40 \cdot 12 = 0$

$V_2 = 78KN$

$M_5 = V_1 \cdot 5 = 22 \cdot 5 = 110KN$

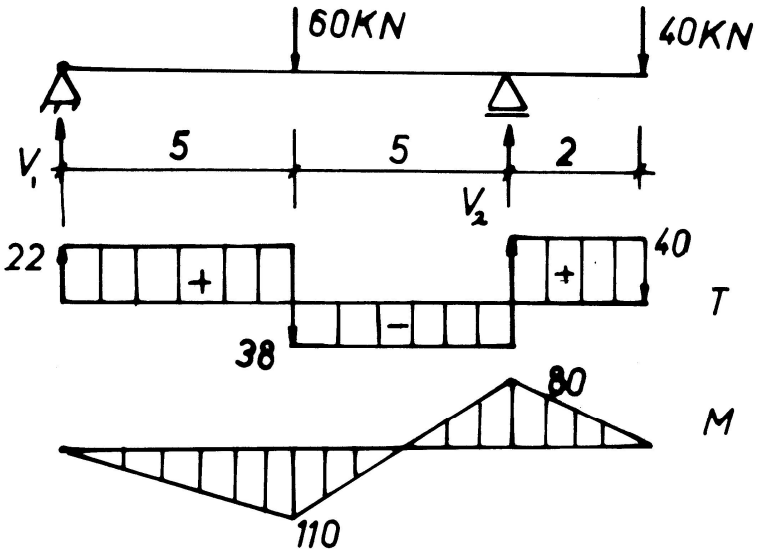


Fig.2.22 Diagrame pentru grinda principală1-2

Diagrama de forță tăietoare se deschide cu V_1=22KN, este constantă pînă în dreptul forței concentrate de 60KN unde are loc un salt în diagramă pînă la –38KN. În continuare diagrama este constantă pînă în dreptul reacțiunii V_2 unde are loc un salt pînă la +40KN apoi este constantă pe lungimea consolei şi se închide în capătul liber de consolă cu forța concentrată de 40KN.
Valoarea momentului în punctul de acțiune al forței concentrate de 60KN este egală cu produsul dintre reacțiunea V_1 şi brațul de pîrghie de 5m. Pe reazemul 2 momentul încovoietor se poate obține luînd în considerare efectul forțelor de la dreapta luat cu semn schimbat.

Exemplul 2 Să se determine reacțiunile şi să se traseze diagramele de eforturi pentru grinda Gerber din figura 2.23.

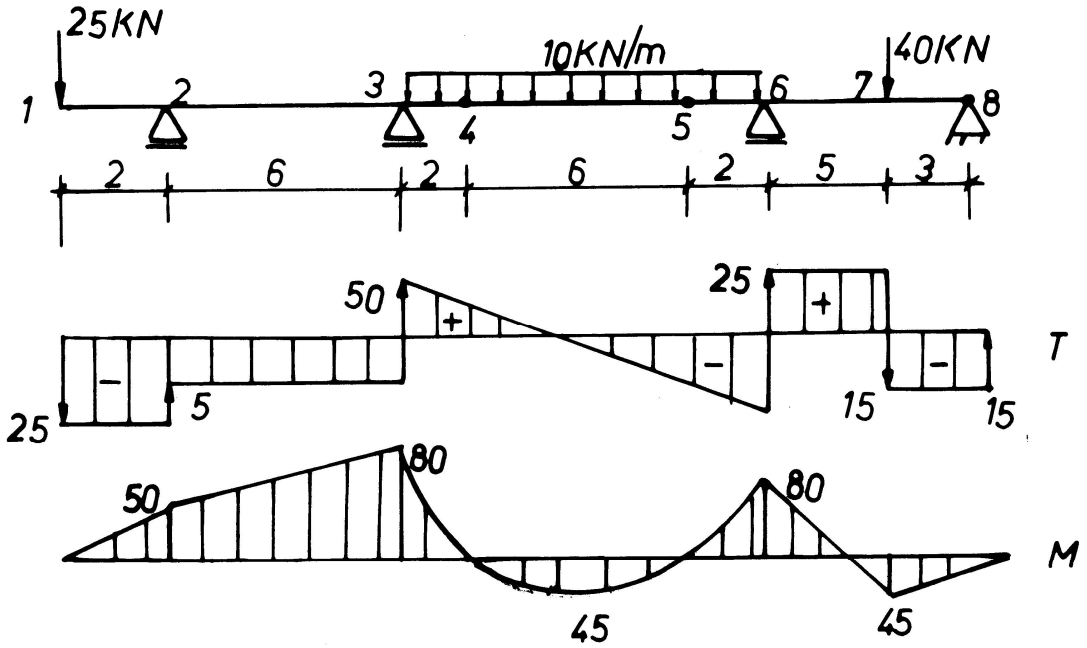


Fig.2.23 Diagrame T,M pentru o grindă Gerber

Grinda continuă se împarte în grinzi principale (2-3) şi (6-8) şi grindă secundară (4-5)
Calculul începe cu rezolvarea grinzii secundare (fig.2.24)
Reacțiunile V_4 şi V_5 sînt egale cu $10 \cdot 6/2 = 30KN$
Valoarea maximă a momentului încovoietor este în mijlocul grinzii şi este egală cu $pl^2/8 = 45KNm$
Reacțiunile grinzii principale 2-3 (fig.2.26) se determină prin ecuații de echilibru static obținundu-se astfel V_2 şi V_3

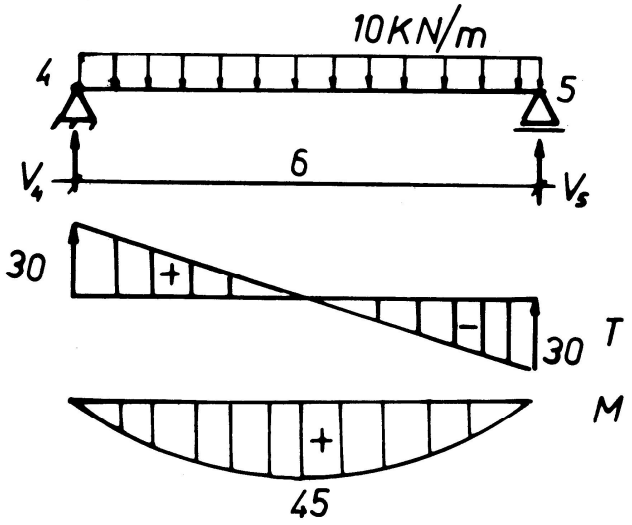


Fig.2.24 Diagrame de eforturi pentru grinda secundară 4-5

$$\left(\sum M\right)_2 = 0$$
$$-25 \cdot 2 - V_3 \cdot 6 + 10 \cdot 2 \cdot 7 + 30 \cdot 8 = 0$$
$$V_3 = 55KN$$
$$\left(\sum M\right)_3 = 0$$
$$-25 \cdot 8 + V_2 \cdot 6 + 10 \cdot 2 \cdot 1 + 30 \cdot 2 = 0$$
$$V_2 = 20KN$$
$$M_3 = -(10 \cdot 2 \cdot 1 + 30 \cdot 2) = -80$$

Diagrama de forță tăietoare se deschide cu forța concentrată de 25KN sub axa barei, este

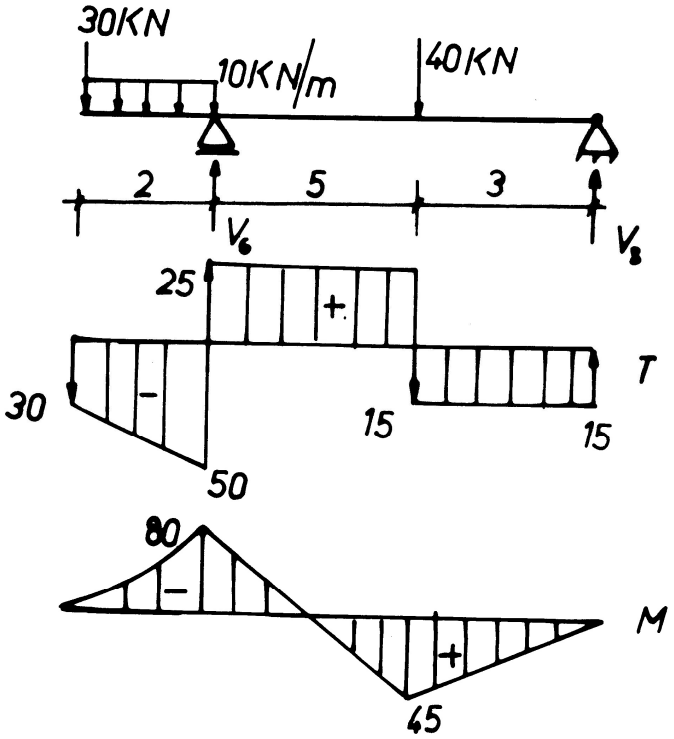


Figura 2.25 Grinda 6-8

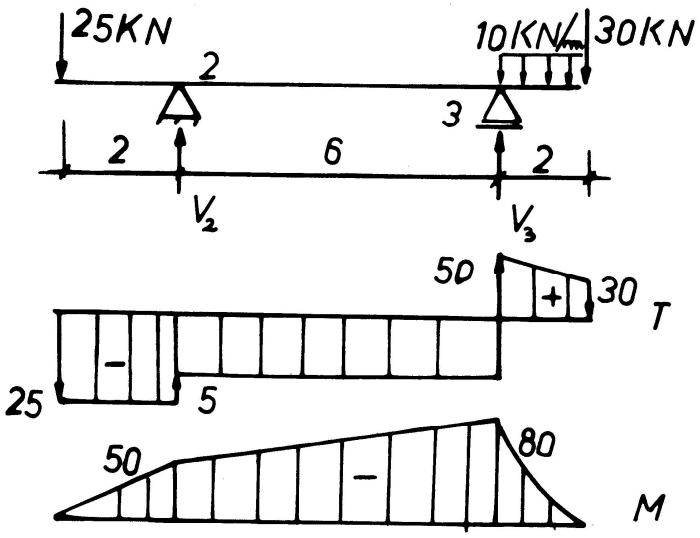


Figura 2.26 Diagrame de eforturi pentru grinda principală 2-3

constantă pînă în dreptul punctului de aplicație al reacțiunii V_2 unde are loc un salt pînă la –5KN. În continuare diagrama este constantă pînă în dreptul reacțiunii V_3 cînd are loc un salt pînă la 50KN,urmează o variație liniară şi diagrama se închide cu forța concentrată de 30KN.
Diagrama de moment este negativă deasupra axei barei avînd valoarea de –50KNm în reazemul 2 şi –80KNm în reazemul 3. Se observă că panta diagramei de moment pe tronsonul 2-3 este mai redusă decît pe consola din stînga deoarece pe tronsonul 2-3 valoarea forței tăietoare este mai redusă.

Determinarea reacțiunilor pentru grinda secundară 6-8 (fig.2.25) se face prin ecuații de echilibru static.

$$\left(\sum M\right)_8 = 0 \rightarrow$$
$$-30\cdot 10 - 10\cdot 2\cdot 9 + V_6\cdot 8 - 40\cdot 3 = 0$$
$$V_6 = 75KN$$
$$\left(\sum M\right)_6 = 0 \rightarrow$$
$$-30\cdot 2 - 10\cdot 2\cdot 1 + 40\cdot 5 - V_8\cdot 8 = 0 \rightarrow$$
$$V_8 = 15KN$$

Diagrama de forțe tăietoare se deschide cu forța concentrată
de 30KN, urmează apoi o variație liniară datorită încărcării
uniform distribuite pînă în punctul 6 unde are loc un salt datorită reacțiunii V_6 pînă la +25KN.
În continuare diagrama este constantă pînă la punctul de aplicație al forței concentrate cînd are loc un salt pînă la –15KN. În continuare diagrama este constantă pînă în capătul liber de consolă cînd diagrama se închide cu reacțiunea V_8=15KN.
Momentul pe reazemul 6 se obține calculînd momentul forțelor din stînga reazemului 6.
$M_6 = -30\cdot 2 - 10\cdot 2\cdot 1 = -80KN$
Momentul în punctul de aplicație al forței concentrate de 45KN se poate calcula ca fiind
$-(-V_8\cdot 3) = 45KNm$

Exemplul 3: Să se determine reacțiunile şi să se traseze diagramele de eforturi pentru grinda Gerber din figura 2.27.

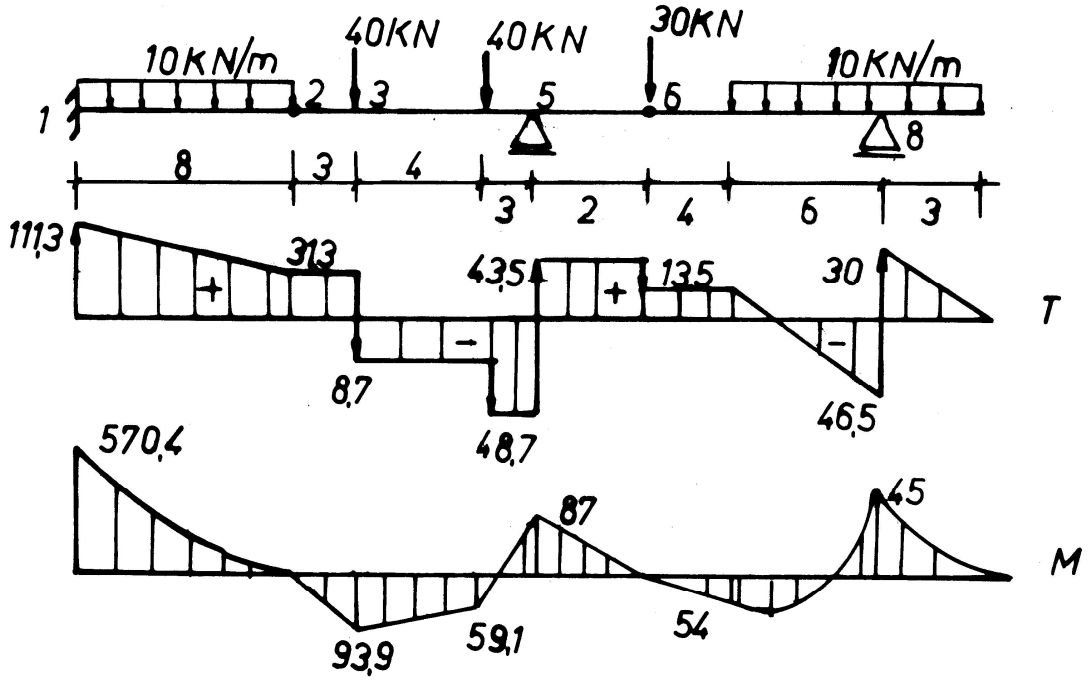


Fig.2.27 Fiagrame de eforturi pentru o grindă Gerber

Ca şi în cazurile precedente această grindă se împarte în grinzi principale şi grinzi secundare.
Grinda 6-8 este grindă secundară (fig.2.28) pentru grinda 2-5. Grinda 2-5 devine grindă secundară pentru grinda 1-2. Reacțiunile V_6 şi V_8 se obțin din ecuații de echilibru static.

$$\left(\sum M\right)_8 = 0 \rightarrow -10\cdot 6\cdot 3 +$$
$$V_6\cdot 10 + 10\cdot 3\cdot 1{,}5 = 0$$
$$V_6 = 13{,}5KN$$
$$\left(\sum M\right)_6 = 0 \rightarrow 10\cdot 9\cdot 8{,}5 - V_8\cdot 10 = 0$$
$$V_8 = 76{,}5KN$$

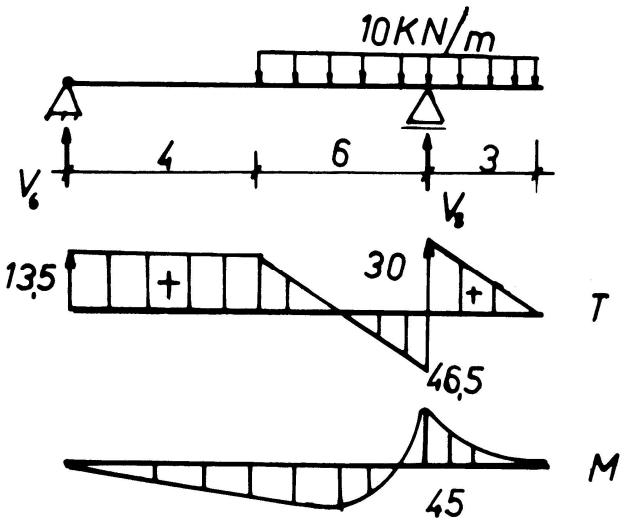


Figura 2.28 Grinda 6-8

Diagrama de forță tăietoare se deschide cu reacțiunea V_6 este constantă pînă în punctul 7, urmează o variație liniară din încărcarea uniform distribuită pînă în punctul 8 cînd acționează reacțiunea V_8, forța tăietoare ajungînd la +30KN deasupra axei barei.În continuare diagrama are variație liniară şi se închide în zero în capătul liber de consolă.
Diagrama de moment are o variație liniară pe intervalul 6-7, urmează apoi o variație parabolică pînă pe reazemul 8 unde valoarea momentului este –45KNm
Reacțiunile V_2 şi V_5 pentru grinda principală 2-5 (2.29) se determină prin ecuații de echilibru static.

$$\left(\sum M\right)_5 = 0 \rightarrow V_2 \cdot 10 - 40 \cdot 7 - 40 \cdot 3 + 43{,}5 \cdot 2 = 0$$

$$V_2 = 31{,}3KN$$

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow 40 \cdot 3 + 40 \cdot 7 - V_5 \cdot 10 + 43{,}5 \cdot 12 = 0$$

$$V_5 = 92{,}2KN$$

Momentul în secțiunea 3 este $V_2 \cdot 3 = 93.9KNm$
Momentul în secțiunea 4 se obține scriind suma momentelor forțelor din stînga secțiunii:

$$M_4 = 31{,}3 \cdot 7 - 40 \cdot 4$$

$$M_4 = 59{,}1KNm$$

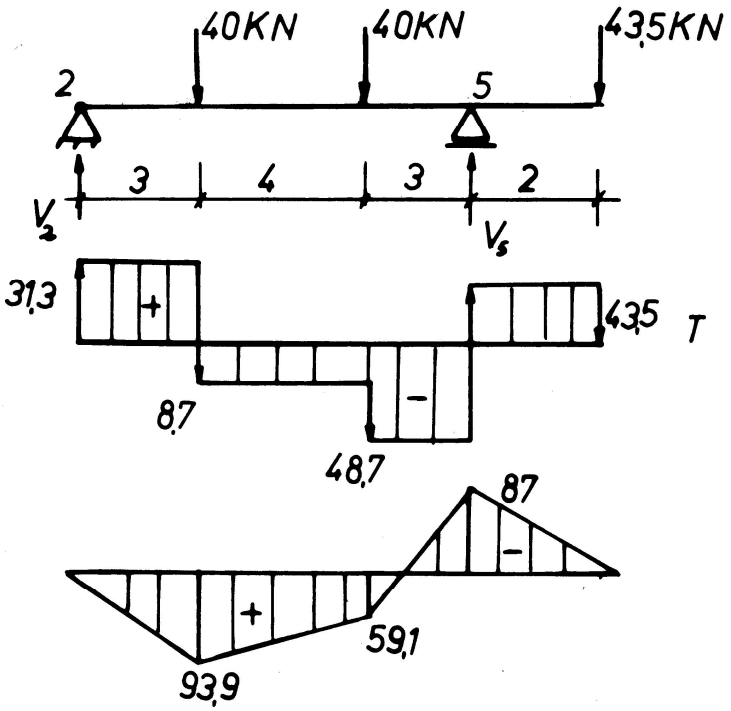


Fig.2.29 Grinda secundară 2-5

Momentul pe reazemul 5 se poate calcula cu forțele din dreapta secțiunii 5

$M_5 = -(43.5 \cdot 2) = -87KNm$

Grinda principală 1-2 (fig.2.30) reprezintă o consolă încărcată
cu sarcină uniform distribuită şi forța concentrată de 31.3KN care reprezintă reacțiunea V_2 luată cu semn schimbat.
Reacțiunea V_1 se poate obține dintr-o ecuație
de proiecție pe verticală iar momentul M_1
printr-o ecuație de echilibru static în punctul 1.

$\sum y_i = 0 \rightarrow V_1 - 80 - 31{,}3 = 0$

$V_1 = 111{,}3KN$

$-M_1 + 10 \cdot 8 \cdot 4 + 31{,}3 \cdot 8 = 0$

$M_1 = 570{,}4KNm$

Diagrama de forță tăietoare se deschide cu reacțiunea V_1=111,3KN, urmează o variație liniară datorită încărcării uniform distribuite,

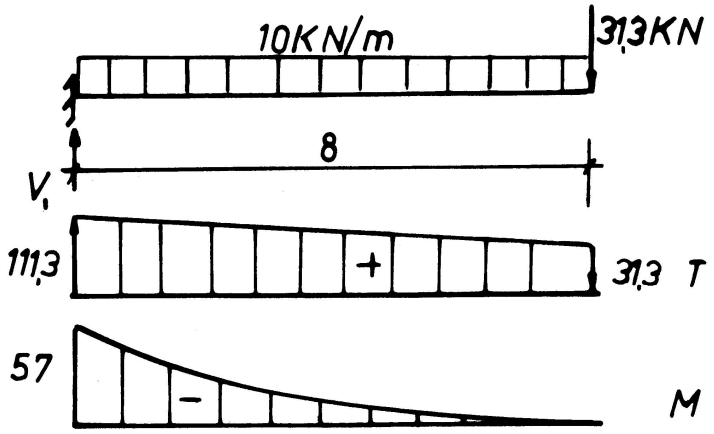


Fig.2.30 Diagrame de eforturi grinda 1-2

în final diagrama de forță tăietoare se închide cu forța concentrată de 31,3KN
Diagrama de moment se deschide cu momentul concentrat de 57.04KNm urmînd o variație parabolică pînă în 0 în capătul liber de consolă.

CAP.3 CADRE STATIC DETERMINATE

Asemenea structuri pot fi privite ca rezultînd din asamblarea prin intermediul unor articulaţii a mai multor bare drepte sau cotite; numărul total de legături trebuie să corespundă numărului minim necesar asigurării indeformabilităţii geometrice a structurii obţinute. Deoarece sarcinile pot fi aplicate oriunde pe barele componente, solicitarea dominantă în structură este încovoierea. În proiectarea construcţiilor nu se întîlnesc obişnuit cadre static determinate. Studiul acestora este totuşi necesar, deoarece una dintre metodele generale de rezolvare a cadrelor static nedeterminate foloseşte ca sistem de bază cadre static determinate.

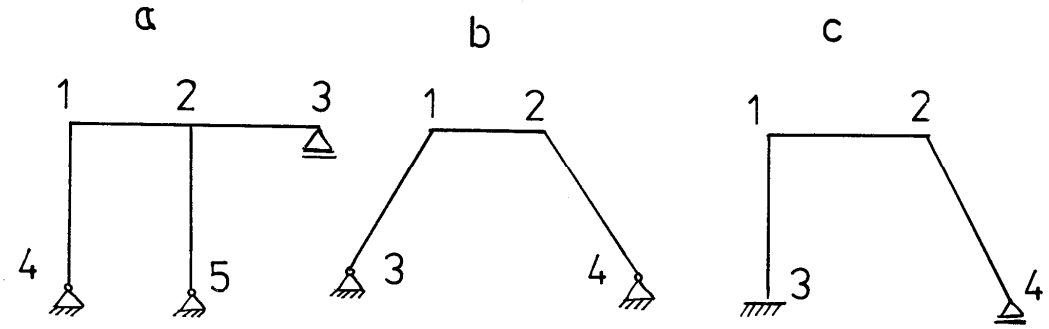


Fig.3.1 Exemple de cadre

La aflarea reacţiunilor cadrelor static determinate, deseori nu este necesară desfacerea legăturilor interioare şi separarea în porţiuni. Este suficient ca la cele trei ecuaţii de echilibru static, care se pot scrie pentru ansamblul structurii, să se adauge condiţiile de moment încovoietor nul în punctele de articulare din interiorul sistemului. Pentru trasarea diagramelor de eforturi se vor utiliza caracteristicile stabilite la studiul barelor drepte, care derivă din relaţiile generale dintre intensitatea încărcării, forţa tăietoare şi momentul încovoietor din secţiunea curentă. Este necesar să se facă permanent legătura cu fenomenul fizic al deformării structurii, care se oglindeşte în diagrama de momente încovoietoare. Intuirea directă a aspectului poziţiei deformate permite să se înţeleagă mai bine modul de comportare al structurii sub acţiunea sarcinilor şi să se controleze rezultatele obţinute prin calcul.

Cadrele static determinate se întîlnesc rar în practică , ele însă constituie schema de calcul (structura de bază) pentru rezolvarea cadrelor static nedeterminate prin metoda forţelor. Dintr-o structură static nedeterminată prin suprimarea unui număr de legături egal cu gradul de nedeterminare statică se obţine structura de bază . Cadrul din figura 3.1a este de două ori static nedeterminat; suprimînd două legături interioare se obţine un cadru static determinat. Cadrul din figura 3.1b este o dată static nedeterminat; pentru a obţine un cadru static determinat se introduce o articulaţie interioară pe rigla 1-2. Dacă la cadrul din fig.3.1c care este o data static nedeterminat se suprimă o legatură în încastrare se obţine un cadru static determinat. Cadrele static determinate sînt alcatuite din bare drepte şi din bare cotite.

Trasarea diagramelor de eforturi necesită calculul reacţiunilor, care se determină scriind ecuaţiile de echilibru static pe structura în ansamblu şi condiţiile de momente încovoietoare nule în articulaţiile interioare. Pentru a trasa diagramele de eforturi este necesar să se precizeze convenţiile de semne pentru eforturi. Astfel, convenţiile de semne pentru forţa axială şi tăietoare sînt identice cu cele de la grinzile drepte, iar momentul încovoietor se consideră pozitiv cînd întinde fibra interioară.

În cazul cadrelor cu mai multe deschideri (fig.3.2a) precizarea numai a fibrei interioare nu este suficientă şi de aceea se obişnuieşte să se puncteze pe figură, fibra aleasa ca bază pentru momentul încovoietor pozitiv. Aceste convenţii corespund alegerii unui sens de parcurgere al structurii de la stînga la dreapta (reprezentat printr-o sageată pe structură) , aplicînd pentru fiecare bară convenţiile de la grinda dreaptă. În ceea ce priveşte reprezentarea diagramelor de eforturi pe barele cadrului, forţa tăietoare şi axială pozitivă se reprezintă deasupra axei barei , iar momentul încovoietor pe fibra întinsă.

Existenţa nodurilor rigide sau articulate aduce unele aspecte specifice în ceea ce priveşte modul de comportare la acţiunea încărcărilor exterioare.

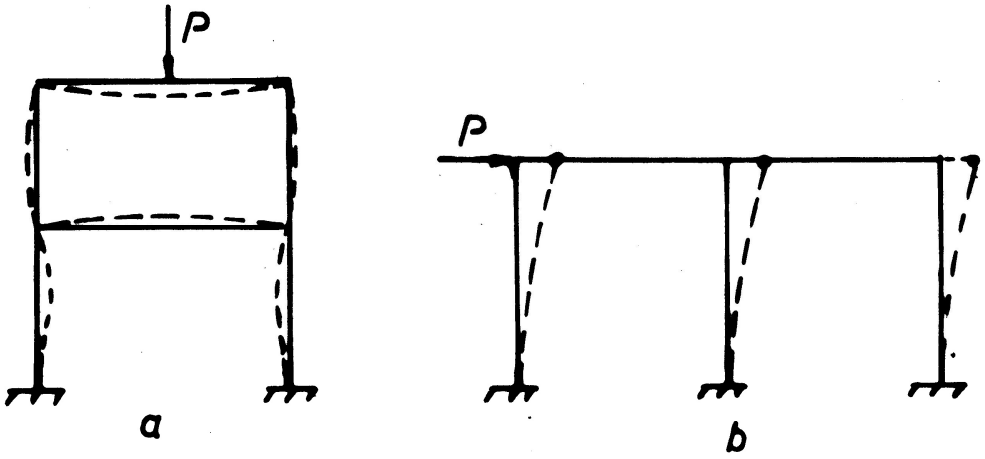


Fig.3.2 Forme deformate sub acţiunea sarcinilor exterioare

Un nod rigid se caracterizează prin faptul că secţiunile barelor ce se întîlnesc în acest punct au aceeaşi translaţie si aceeaşi rotire. Ca urmare a rotirii egale a acestor secţiuni, dacă în poziţia deformată se duc tangente în nod, acestea formeaza un unghi egal cu cele pe care îl formează axele barelor în poziţia iniţială nedeformată (fig.3.2).

Existenţa nodului rigid conduce la deformarea prin încovoiere a ambelor bare, deşi numai una dintre ele este încărcată direct cu forţa exterioară.

Un nod articulat se caracterizează prin aceea că secţiunile barelor ce se întîlnesc în acest punct au aceeaşi translaţie, iar rotirea lor relativă este liberă să se producă, astfel încît unghiul iniţial dintre axele barelor se modifică. O astfel de comportare este exemplificată în fig. 3.2b.

Gradul de nedeterminare statica se stabileşte cu relaţia:

N=3C-A-2S

Unde N reprezintă gradul de nedeterminare statică, C numărul de contururi perfect închise, A numărul de articulaţii, S numărul de reazeme simple.

Pentru N=0 structura este static determinată, iar pentru N>0 structura este static nedeterminată.

3.1 Bare cotite

Barele cotite pot fi privite ca alcătuite din două bare drepte legate rigid între ele, formînd un nod în punctul de legătură. Rigiditatea nodului condiţionează modul de deformare al barei cotite: tangentele duse în nod la cele două ramuri ale deformatei păstrează între ele acelaşi unghi, care există în poziţia iniţială între axele nedeformate ale barelor. Prin aceasta deformarea uneia dintre bare antrenează şi deformarea celeilalte bare. Diagramele de eforturi se întind obişnuit pe ambele bare chiar dacă numai una dintre acestea este încărcată. Privitor la eforturile care se dezvoltă în secţiunile situate imediat de o parte şi de alta a nodului rigid, trebuie reţinute următoarele:

(1) Forţa axială şi forţa tăietoare îşi modifică brusc valoarea, deoarece axele pe care se proiectează forţele situate la stînga secţiunii îşi schimbă orientarea cînd se trece de la o bară la cealaltă.
(2) Momentul încovoietor rămîne acelaşi în cele două secţiuni care încadrează nodul teoretic, deoarece aceste secţiuni au acelaşi centru de greutate, în raport cu care se ia suma momentelor

forțelor situate la stînga secțiunii. În diagrama M se va raporta ordonata din extremitatea uneia dintre bare (printr-un arc de cerc) la noua linie de referință formată de axa celeilalte bare.

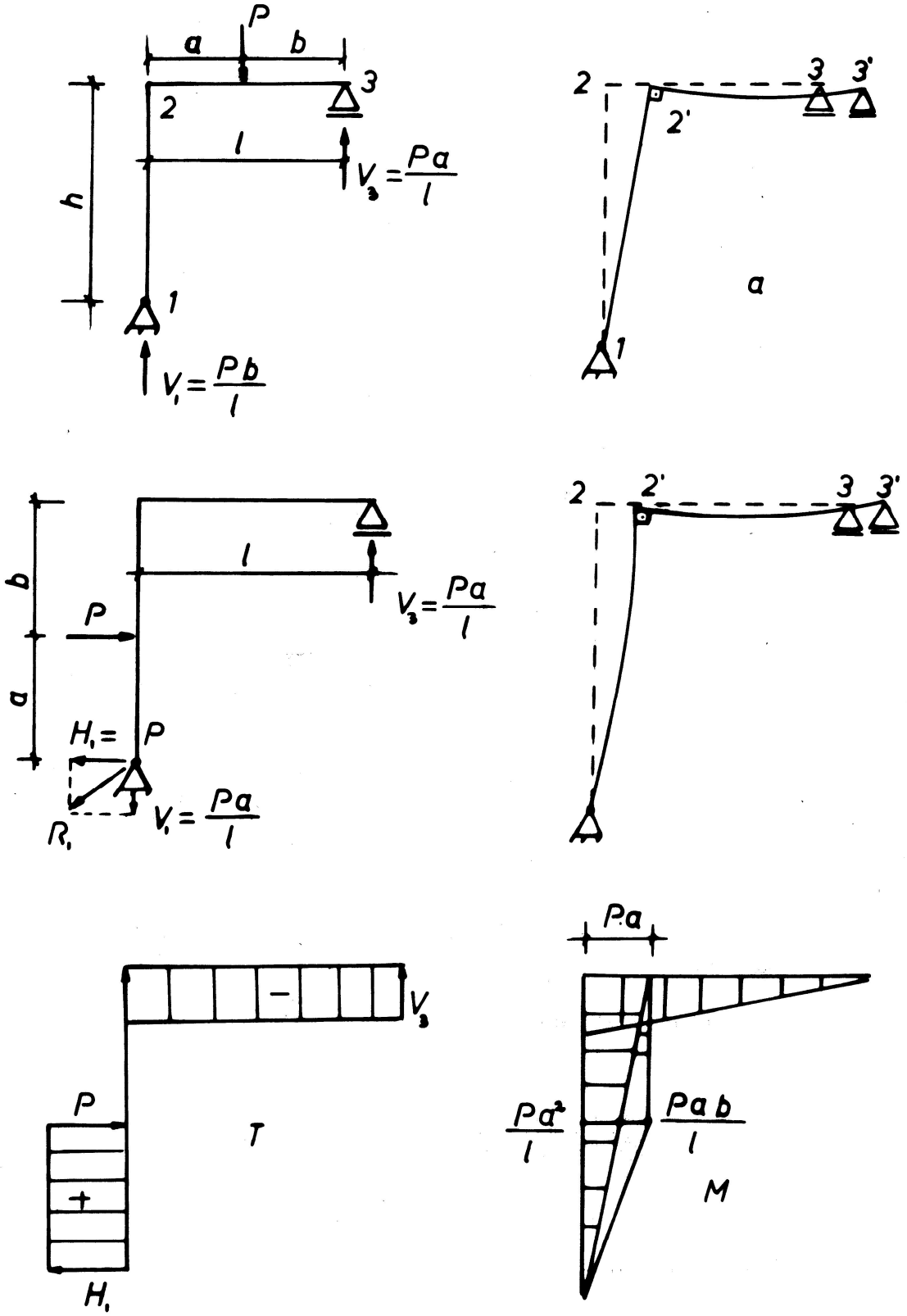


Fig.3.3 diagrame T,M pentru o bară cotită

Pentru exemplificare în figura 3.3 este dată o bară cotită în unghi drept, în două situații de încărcare. Reazemul simplu din 3 are reacțiune verticală.

În cazul a), sarcina calcă pe bara 2-3; reacțiunile din 1 şi 3 sînt ambele verticale, astfel că bara 1-2 este supusă numai la efort axial, în timp ce pentru bara 2-3 diagramele de eforturi sînt aceleaşi cu ale unei grinzi simplu rezemate. Prin deformare, bara cotită suferă o deplasare laterală şi nodul 2 se roteşte. Tangenta în 2' la ramura 2'-3' a deformatei rămîne normală pe noua poziție 1-2' a barei verticale, care nu se deformează deoarece în secțiunile sale nu se dezvoltă momente încovoietoare.

În cazul b) sarcina calcă pe bara 1-2 producînd reacțiunile arătate pe figură. Cuplul format de sarcina P şi reacțiunea H_1 este echilibrat de cuplul dat de reacțiunile verticale V_1 şi V_3. În reazemul 3 deplasarea pe orizontală nu este împiedicată, astfel că bara cotită prin deformare suferă o deplasare laterală în poziția 1-2'-3' iar nodul rigid se roteşte. Prin aceasta, tangentele în 2' la cele 2 ramuri ale deformatei se rotesc cu acelaşi unghi față de pozițiile inițiale ale barelor, unghiul dintre tangente rămînînd acelaşi; totodată , unghiul dintre liniile nodurilor 1-2 şi 2-3 creşte cînd aceste linii ajung în pozițiile 1-2' şi 2'-3'. Încastrarea dintre bare în nod este solicitată prin deformare, datorită modificării unghiului dintre liniile nodurilor, în timp ce unghiul dintre tangente rămîne neschimbat. Aceasta explică modul de deformare al barei cotite; în cazul considerat deformarea barelor se face spre interior, deci încovoierea are sens pozitiv conform convenției de semne indicată pe figură.

Trasarea diagramelor T şi M se face după normele cunoscute, remarcîndu-se că pe porțiunea i-2 forța tăietoare este nulă, deci momentul încovoietor are valoarea maximă M_I=Pa constantă pe această porțiune. În diagrama M, porțiunea haşurată des de pe bara 1-2, cu ordonata maximă Pab/l în dreptul sarcinii, este chiar diagrama barei 1-2 considerată grindă simplu rezemată. Restul diagramei M pe cele două bare este format dintr-o pereche de triunghiuri cu vîrfurile în 1 şi 3 avînd ordonata comună M_2=Pa în nodul 2. Această pereche de triunghiuri reprezintă efectul legăturii rigide dintre cele 2 bare în nod.

3.2 Calculul eforturilor pentru cadre static determinate

Sistemele de bare ale căror axe formează o linie frîntă sau ramificată, iar nodurile realizează legături rigide sau articulate poartă numele de cadre. Prin figură indeformabilă se înțelege aceea care nu permite deplasări de felul celor care au loc în mecanisme, ci numai deformații şi deplasări elastice.

Calculul practic se începe cu determinarea reacțiunilor. Cadrele fiind static determinate reacțiunile se obțin prin metodele cunoscute din Mecanica teoretică.

Este recomandabil ca în funcție de situația reală de analizat să se scrie trei ecuații de echilibru pentru ansamblu şi condiții de moment încovoietor egal cu zero în articulațiile interioare.

După calculul reacțiunilor urmează trasarea diagramelor de eforturi, care se stabilesc pe baza relațiilor diferențiale dintre eforturi şi încărcări, cunoscute de la grinda dreaptă.

Corectitudinea trasării diagramelor de eforturi se verifică prin condiția de echilibru static, aplicată fie nodurilor fie unei părți a structurii.

Exemplul 1:

Sa se traseze diagramele de forță axială, de forță taietoare şi de moment încovoietor la structura din fig.3.4

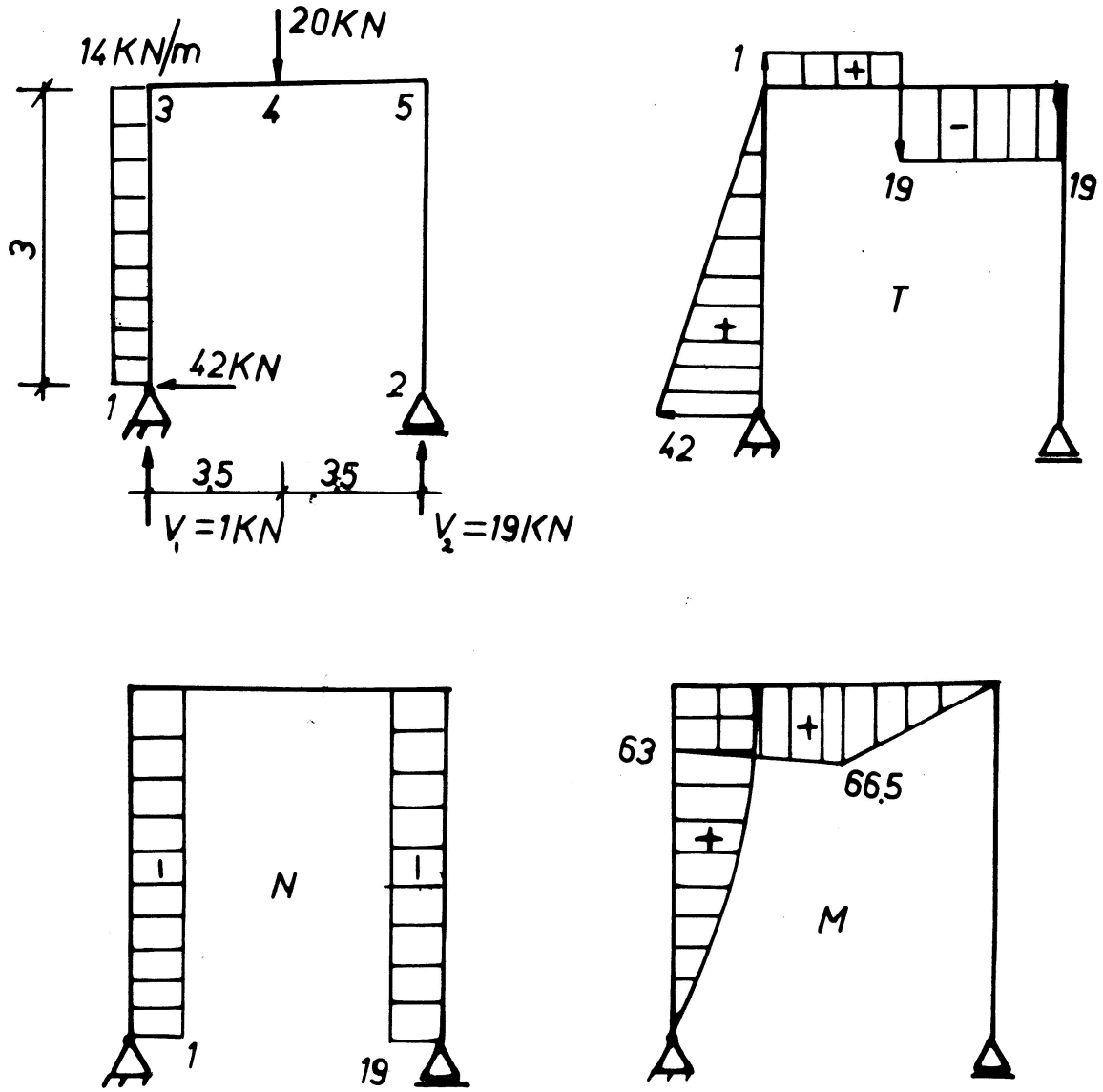


Fig.3.4 Diagrame de eforturi pentru un cadru static determinat

Calculul reacțiunilor:

$$\sum X_i = 0 \rightarrow H_1 = 14 \cdot 3 = 42KN$$

$$\left(\sum M\right)_2 = V_1 \cdot 7 + 14 \cdot 3 \cdot 1{,}5 - 20 \cdot 3{,}5 = 0 \rightarrow V_1 = 1KN$$

$$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow 14 \cdot 3 \cdot 1{,}5 + 20 \cdot 3{,}5 - V_2 \cdot 7 = 0 \rightarrow V_2 = 19KN$$

Diagrama de forta axiala , N

Pe stîlpul 1-3, în structura 1, pe direcția axei se proiectează numai reacțiunea verticală $V_1 = 1KN$, efectul său fiind întinderea barei.

Deoarece pîna în secțiunea 3 nu mai intervine nici o alta forță rezultă ca forța axială este constantă şi este efort de compresiune.

Pe rigla 3-4, efortul axial este zero.

Pe stîlpul 2-5, în secțiunea 2 acționează numai reacțiunea $V_2 = 19KN$ care are direcția axei barei, iar ca efect o comprimă. Deci forța axială este constantă şi este efort de compresiune.

Diagrama de forţă tăietoare T

Pe stîlpul 1-3 în secţiunea 1 se proiectează pe normala la axa barei numai reacţiunea H_1=42KN, în continuare intervine efectul încărcării uniform distribuite, astfel încît pe înălţimea stîlpului 1-3 forţa tăietoare are o variaţie liniară, iar în secţiunea 3 forţa tăietoare ajunge zero.

Pe rigla 3-4, în secţiunea 3, se proiectează pe normala la axa barei numai reacţiunea V_1=1KN, în continuare forţa tăitoare este constantă pînă în secţiunea 4 cînd acţionează forţa concentrată de 20KN. În secţiunea 4 apare un salt în diagrama de forţă tăietoare, ulterioar ea închizîndu-se în zero în secţiunea 5, secţiune în care acţionează reacţiunea V_2.

Pe stîlpul 2-5 forţa tăietoare este egală cu zero, deoarece pe această bară nu acţionează nici o forţă transversală.

Diagrama de moment încovoietor M

În capătul 1 al stîlpului 1-3 momentul încovoietor este egal cu zero deoarece în această secţiune este o articulaţie. Pe lungimea stîlpului momentul încovoietor variază parabolic. În capătul 3 al stîlpului momentul încovoietor este $M_3 = 42 \cdot 3 - 14 \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 63\text{KN} \cdot \text{m}$. Fibra întinsă este fibra interioară.

Pe rigla 3-4, în capătul 3, momentul încovoietor are tot valoarea de 63KNm deoarece nodul 3 este unic şi aparţine atît stîlpului cît şi riglei. Fibra întinsă pe riglă este cea de la interior.În secţiunea 4 (punctul de aplicaţie al forţei concentrate) valoarea momentului încovoietor este de 66,5KNm, iar în secţiune 5 momentul încovoietor se anulează.

Pe intervalul 3-4 momentul încovoietor variază liniar, iar în punctul de aplicaţie al forţei concentrate prezintă un maxim, $M_4 = 19 \cdot 3{,}5 = 66{,}5\text{KNm}$.

Verificarea corectitudinii diagramelor de eforturi (a valorilor eforturilor) se face utilizînd condiţia de echilibru static a nodurilor, sub acţiunea forţelor aplicate direct în nod şi a eforturilor din secţiunile infinit vecine nodului.

Exemplul 2: Să se traseze diagramele N,T,M pentru structura static determinată din fig.3.5

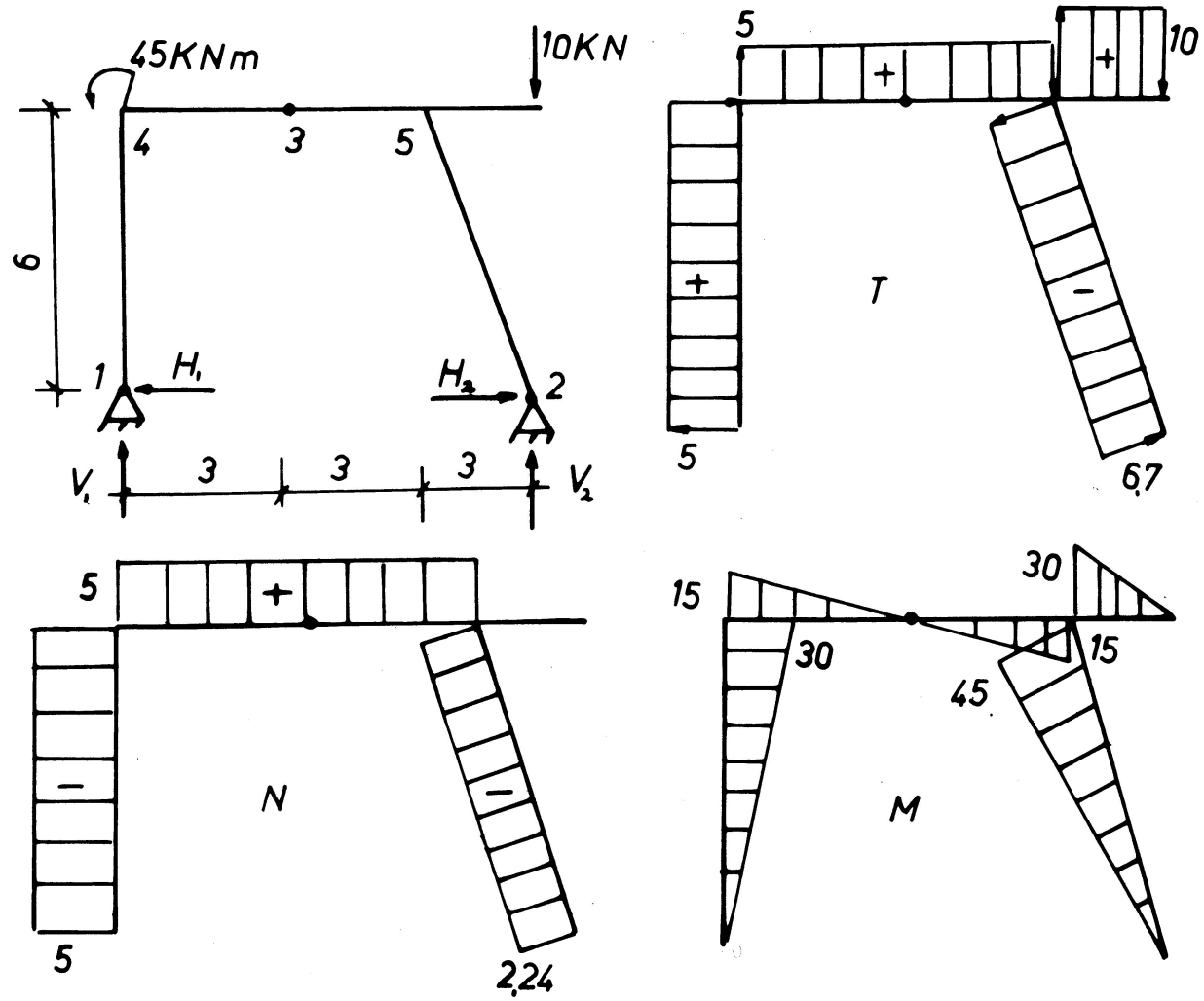


Fig.3.5 Diagrame de eforturi pentru un cadru triplu articulat

Calculul reacțiunilor :

$\sum(M)_2 = 0; V_1 \cdot 9 - 45 = 0 \rightarrow V_1 = 5KN; \sum(M)_1 = 0; -V_2 \cdot 9 + 10 \cdot 9 - 45 = 0; V_2 = 5KN$

Verificare: $\sum Y = 5 - 10 + 5 = 0$

$M_3{}^{st} = 0; 5 \cdot 3 + H_1 \cdot 6 - 45 = 0; H_1 = 5KN; M_3{}^{dr} = 0;$

$5 \cdot 6 + H_2 \cdot 6 - 10 \cdot 6 = 0; H_2 = 5KN$

Verificare: $\sum X = -5 + 5 = 0$

Calculul forțelor tăietoare:

Forța tăietoare în punctul 1 este egală cu H_1=5KN, fiind constantă pe bara 1-4.Pentru bara 4-5 în secțiunea 4 singura forță normală pe axa barei o reprezintă reacțiunea V_1.

T_{25} se obține descompunînd forțele H_2 şi V_2 pe direcție normală la axa barei.

$T_{14} = H_1 = 5KN = T_{41}$ $\quad T_{65} = 10KN = T_{56}$

$T_{45} = V_1 = 5KN = T_{54}$

$T_{25} = -V_2 \cdot \cos\alpha - H_2 \cdot \sin\alpha = -5 \cdot 0{,}447 - 5 \cdot 0{,}894 = -6{,}7KN = T_{52}$

Calculul momentelor încovoietoare:

Momentul încovoietor în articulația 1 este egal cu zero. M_{41} se obține ca fiind produsul dintre reacțiunea H_1 şi brațul de pîrghie de 6m. Momentul în articulația 3 este egală cu zero. Momentul M_{53} a fost calculat luînd în considerare efectul momentelor forțelor de la dreapta secțiunii.

$M_{52} = V_2 \cdot 3 + H_2 \cdot 6 = 45KNm \quad M_6 = 0; \; M_{56} = -10 \cdot 3 = -30KNm$

$M_{53} = V_2 \cdot 3 + H_2 \cdot 6 - 10 \cdot 3 = 15KNm$

Calculul forțelor axiale: Pe stîlpul 1-4 ,pe direcția axei barei se proiectează reacțiunea V_1.Deoarece pînă în secțiunea 4 nu mai acționează nici o altă forță rezultă un efort axial constant şi de compresiune.Pe direcția axei barei 4-5 se proiectează reacțiunea H_1. $N_{14} = -V_1 = -5KN = N_{41}$;

$N_{45} = H_1 = 5KN = N_{54}; \; N_{65} = 0 = N_{56};$

$N_{25} = -V_2 \cdot \sin\alpha + H_2 \cdot \cos\alpha = -5 \cdot 0{,}894 + 5 \cdot 0{,}447 = -2{,}24KN = N_{52}$

Exemplul 3: Să se traseze diagramele N,T,M pentru structura static determinată din fig.3.6

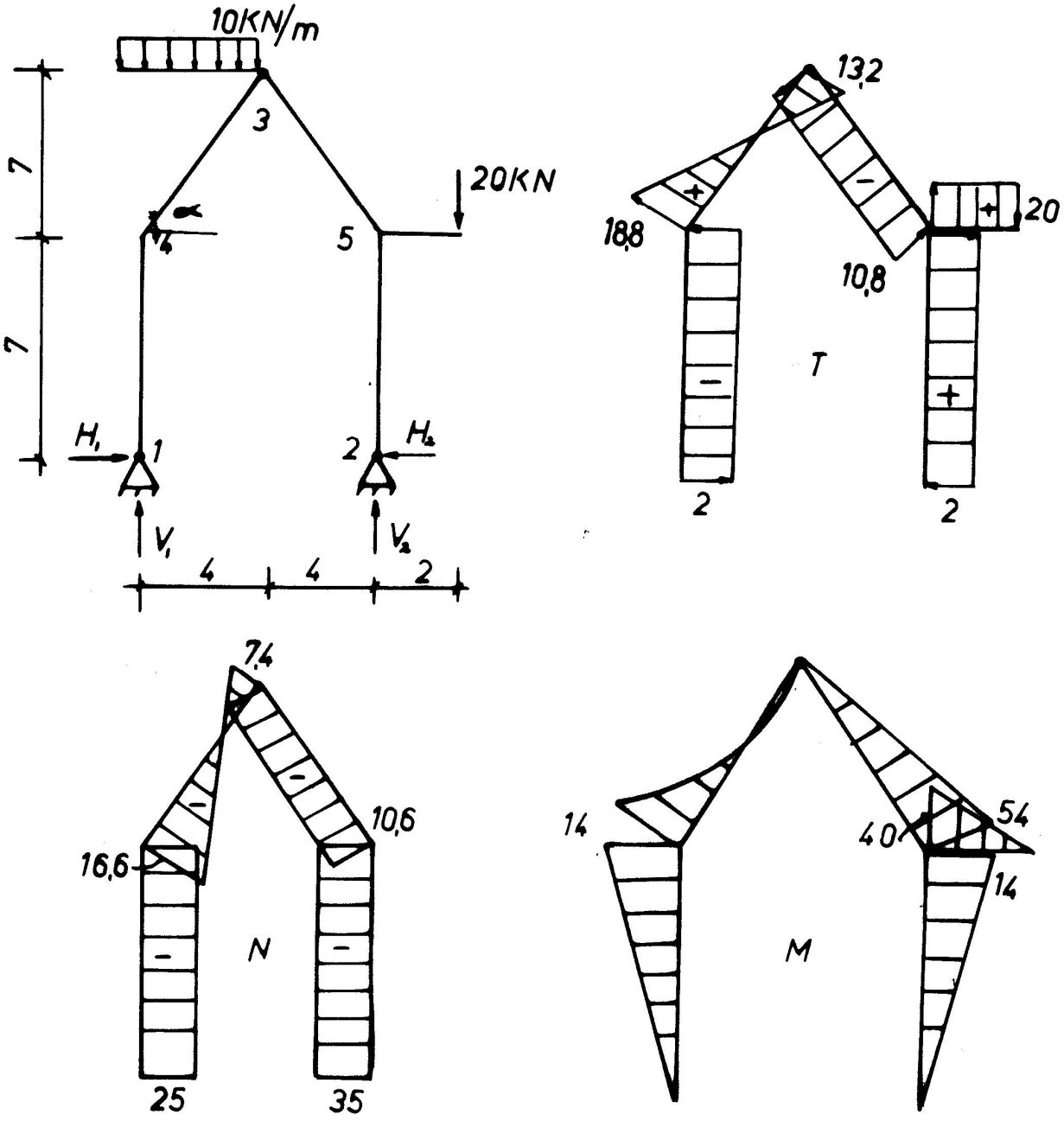


Fig.3.6 Diagrame de eforturi pentru un cadru triplu articulat

Calculul reacțiunilor se face prin scrierea ecuațiilor de echilibru static în articulațiile 1 şi 2:

$\sum (M)_2 = 0;\ \ V_1 \cdot 8 - 10 \cdot 4 \cdot 6 + 20 \cdot 2 = 0;\ \ V_1 = 25KN;$

$\sum (M)_1 = 0;\ \ -V_2 \cdot 8 + 20 \cdot 10 + 10 \cdot 4 \cdot 2 = 0;\ V_2 = 35KN$

Verificare: $\sum Y = 25 - 10 \cdot 4 + 35 - 20 = 0$

Reacțiunile H_1 şi H_2 se obțin prin scrierea ecuațiilor de moment în nodul 3 la stînga şi la dreapta. Se ştie că ecuațiile de echilibru static se pot scrie pentru întreaga structură dar şi pentru părți ale structurii.

$M_{3,st} = 0;\ \ 25 \cdot 4 - H_1 \cdot 10 - 10 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \quad H_1 = 2KN$

$M_{3,dr} = 0;\ \ 35 \cdot 4 - H_2 \cdot 10 - 20 \cdot 6 = 0 \quad H_2 = 2KN$

Verificare: $\sum X = 2 - 2 = 0$

Calculul forțelor tăietoare:

Forța tăietoare în secțiunea 1 se deschide cu valoarea reacțiunii H_1 şi este constantă pe întreaga lungime a stîlpului. Pe bara înclinată 4-3 forța tăietoare are o variație liniară datorită încărcării uniform distribuite. Valoarea în nodul 4 pentru bara 4-3 se obține descompunînd reacțiunile V_1 şi H_1 pe o direcție normală la axa barei.

Similar se procedează şi pentru bara 5-3, se descompun reacțiunile V_2 şi H_2 pe direcție normală la axa barei. În nodul 5 pe consola 5-6 forța tăietoare se deschide cu valoarea de 20KN (care reprezintă suma forțelor normale pe axa barei din stînga secțiunii), este constantă pe lungimea consolei şi se închide în zero cu forța concentrată de 20KN. Pentru stîlpul 5-2 forța tăietoare se deschide cu 2KN reprezentînd suma forțelor normale din stînga, şi se închide cu H_2=2KN.

$T_{14} = -H_1 = -2KN = T_{41};\ \ T_{43} = V_1 \cdot \cos\alpha - H_1 \cdot \sin\alpha = 25 \cdot 0{,}8 - 2 \cdot 0{,}6 = 18{,}8KN$

$T_{34} = V_1 \cdot \cos\alpha - H_1 \cdot \sin\alpha - 10 \cdot 4\cos\alpha = -13{,}2KN$

$T_x = 18{,}8 - 10 \cdot x \cdot \cos\alpha = 0;\ \ x = 2{,}35m$

$T_{25} = H_2 = 2KN = T_{52};\ \ T_{65} = 20KN = T_{56};$

$T_{53} = -V_2 \cdot \cos\alpha + H_2 \cdot \sin\alpha + 20 \cdot \cos\alpha = -10{,}8KN = T_{35}$

Calculul momentelor încovoietoare:

Momentul încovoietor în articulația 1 este egal cu zero, are o variație liniară pînă în 4, fibra întinsă fiind la exterior, momentul negativ.În nodul 4, fiind un nod format din 2 bare momentul se rabate şi pe bara 4-3 tot la exterior.În continuare pe bara 4-3 diagrama de moment are o variație parabolică datorită încărcării uniform distribuite , cu un maxim în dreptul punctului de anulare al forței tăietoare.

Momentul M_{56} se determină prin considerarea momentului creat de forța din dreapta de 20KN, consola fiind o structură static determinată..Momentul M_{52} se obține ca fiind produsul dintre reacțiunea H_2 şi brațul de pîrghie de 7m, diagrama avînd o variație liniară, fibra întinsă fiind la exterior.

$M_1 = 0;\ \ M_{41} = -H_1 \cdot 7 = -14KNm = M_{43};\ M_3 = 0$

$M_{\max} = M_{43} + (1/2) \cdot 18{,}8 \cdot 2{,}35 / \cos\alpha = 13{,}61KNm$

$M_2 = 0;\ \ M_{52} = -H_2 \cdot 7 = -14KNm \quad M_6 = 0$

$M_{56} = -20 \cdot 2 = -40KNm$

$M_{53} = -H_2 \cdot 7 - 20 \cdot 2 = -54KNm$

Calculul forțelor axiale:

Pentru stîlpul 1-4 efortul axial este egal cu V_1 şi este de compresiune. Efortul N_{43} se obține proiectînd pe direcția axei barei reacțiunile V_1 şi H_1.În cazul efortului N_{34} acesta se obține luînd în calcul şi efectul încărcării uniform distribuite, rezultînd că pe rigla înclinată 4-3 efortul axial va avea o variație liniară. Efortul axial pentru rigla 5-3 se obține prin descompunerea pe direcția axei

barei a reacțiunilor V_2 şi H_2, iar pe direcția stîlpului 5-2 se va proiecta pe direcția axei barei numai reacțiunea V_2.

$N_{14} = -V_1 = -25KN = N_{41}$

$N_{43} = -V_1 \cdot \sin\alpha - H_1 \cdot \cos\alpha = -25 \cdot 0{,}6 - 2 \cdot 0{,}8 = -16{,}6KN$

$N_{34} = -V_1 \cdot \sin\alpha - H_1 \cos\alpha + 10 \cdot 4 \sin\alpha = 7{,}4KN$

$N_{25} = -V_2 = -35KN = N_{52}; \quad N_{65} = 0 = N_{56}$

$N_{53} = -V_2 \sin\alpha - H_2 \cos\alpha + 20 \sin\alpha = -10{,}6KN$

Exemplul 4: (cadre multiple)

Sub această denumire se înțeleg cadrele formate din părți principale şi secundare. Particularitatea rezolvării constă în aceea că reacțiunile se calculează începînd cu cele ale părților secundare. Pentru exemplificare fie cadrul din figura 3.7 la care se cere să se traseze diagramele de eforturi N,T şi M.

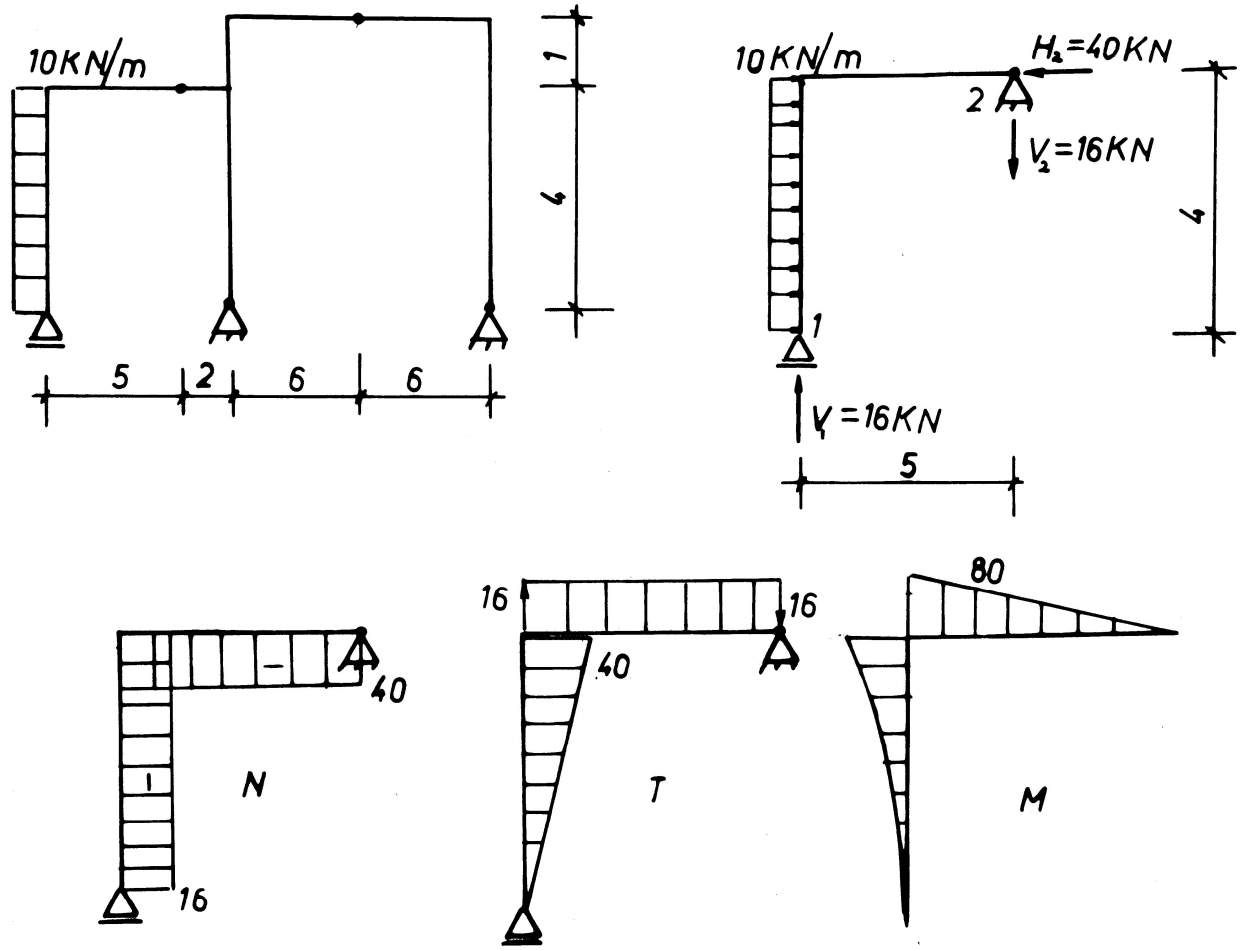


Fig.3.7 Cadru multiplu. Diagrame eforturi structură secundară.

Determinarea reacțiunilor pentru structura secundară:

$\sum X_1 = 0 \rightarrow H_2 = 10 \cdot 4 = 40\text{KN}$

$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 5 - 10 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \rightarrow V_1 = 16\text{KN}$

$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow 10 \cdot 4 \cdot 2 - 40 \cdot 4 + V_2 \cdot 5 = 0$

Determinarea reacțiunilor pentru structura principală:

$(M)_4 = 0 \rightarrow 16 \cdot 14 + 40 \cdot 4 - V_3 \cdot 12 = 0 \rightarrow V_3 = 32\text{KN}$

$$\left(\sum M\right)_3 = 0 \rightarrow 40 \cdot 4 + 16 \cdot 2 - V_4 \cdot 12 = 0 \rightarrow V_4 = 16$$

$$\left(\sum M\right)_5^{st} = 0 \rightarrow -32 \cdot 6 + H_3 \cdot 5 + 16 \cdot 8 - 40 \cdot 1 = 0 \rightarrow H_3 = 20{,}8\text{KN}$$

$$\left(\sum M\right)_5^{dr} = 0 \rightarrow H_4 \cdot 5 - 16 \cdot 6 = 0 \rightarrow H_4 = 19{,}2\text{KN}$$

$$M_6 = 20{,}8 \cdot 5 + 16 \cdot 2 - 40 \cdot 1 = 96$$

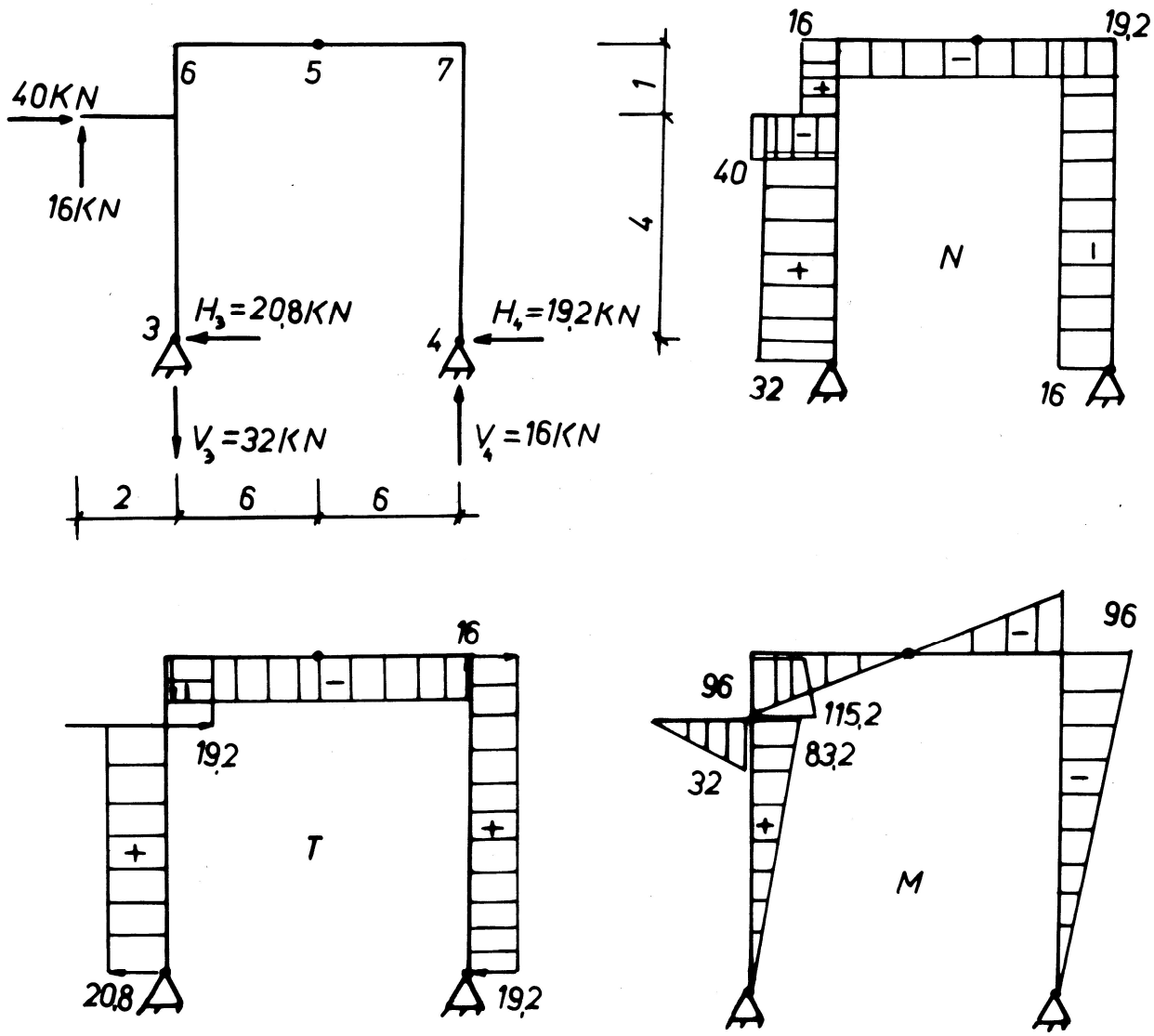


Fig.3.8 Diagrame de eforturi pentru structura principală.

3.3 Utilizarea simetriei şi antisimetriei

Structurile plane uzual întîlnite în practică au deseori particularitatea de a prezenta o axă de simetrie. La construcții industriale, poduri, clădiri civile considerații de ordin tehnologic care derivă din modul de folosință, cerințe economice şi de tipizare, cît şi cerințe de aspect, duc frecvent la alegerea unor tipuri de construcții ale căror elemente principale de susținere (de exemplu cadre) rezultă simetrice. Această particularitate a structurii trebuie folosită, deoarece aduce deseori simplificări substanțiale în rezolvare, atît la trasarea diagramelor de eforturi pentru structuri static determinate, cît mai ales cu ocazia utilizării acestor diagrame la calculul deplasărilor elastice şi la rezolvarea sistemelor static nedeterminate.

Din punct de vedere static, noțiunea de simetrie se referă atît la configurația geometrică a structurii cît şi la rezemările sale. O structură este simetrică față de o axă atunci cînd barele şi legăturile sînt dispuse simetric în raport cu această axă. Atfel structurile din figurile 3.9 sînt toate simetrice față de o axă verticală care trece prin mijlocul deschiderii.

Cît timp sarcinile aplicate pe o structură simetrică sînt oarecare, desigur că nu există nici o particularitate pentru reacțiuni şi eforturi.

Pentru situații particulare de încărcare însă, se pot face anumite observații utile. Fie un cadru simetric oarecare, de exemplu cel din figura 3.9a care este acționat de o încărcare simetrică. În acest caz din cercetarea fenomenului fizic apare evident că se ajunge la o poziție deformată simetrică, ceea ce arată că întreaga situație de solicitare a structurii respectă condiția de simetrie. Ca primă consecință, înseamnă că reacțiunile sînt obligatoriu simetrice în raport cu axa de simetrie, criteriu care poate fi deci utilizat la determinarea lor. Astfel, pentru cadrul considerat, acțiunea reciprocă din articulația 3 trebuie să fie orizontală; pe această bază se pot determina şi direcțiile reacțiunilor din 1 respectiv2 folosind condiția de concurență a cîte trei forțe pentru fiecare din cele două porțiuni.

Pentru cadrul din fig.3.9b înțelegem prin această denumire că încărcările de pe cele două jumătăți ale structurii sînt simetrice ca poziție, direcție şi mărime, dar au sensuri opuse în raport cu axa de simetrie. Şi în acest caz, din punct de vedere fizic, apare evident faptul că structura trece într-o poziție deformată antisimetrică față de axă, ceea ce arată că întreaga situație de solicitare a structurii respectă condiția de antisimetrie. În consecință reacțiunile sînt antisimetrice în raport cu axa de simetrie. Astfel pentru cadrul considerat acțiunea reciprocă din articulația 3 trebuie să fie verticală (M_s). În rezemările 1 şi 2 nu pot apare, pentru sarcini verticale, componente orizontale ale reacțiunilor, deoarece condiția de echilibru ar cere ca acestea să fie egale şi cu sensuri opuse, ceea ce ar conduce la o pereche simetrică de componente; se dezvoltă deci numai reacțiuni verticale, egale ca mărime şi avînd sensuri contrare.

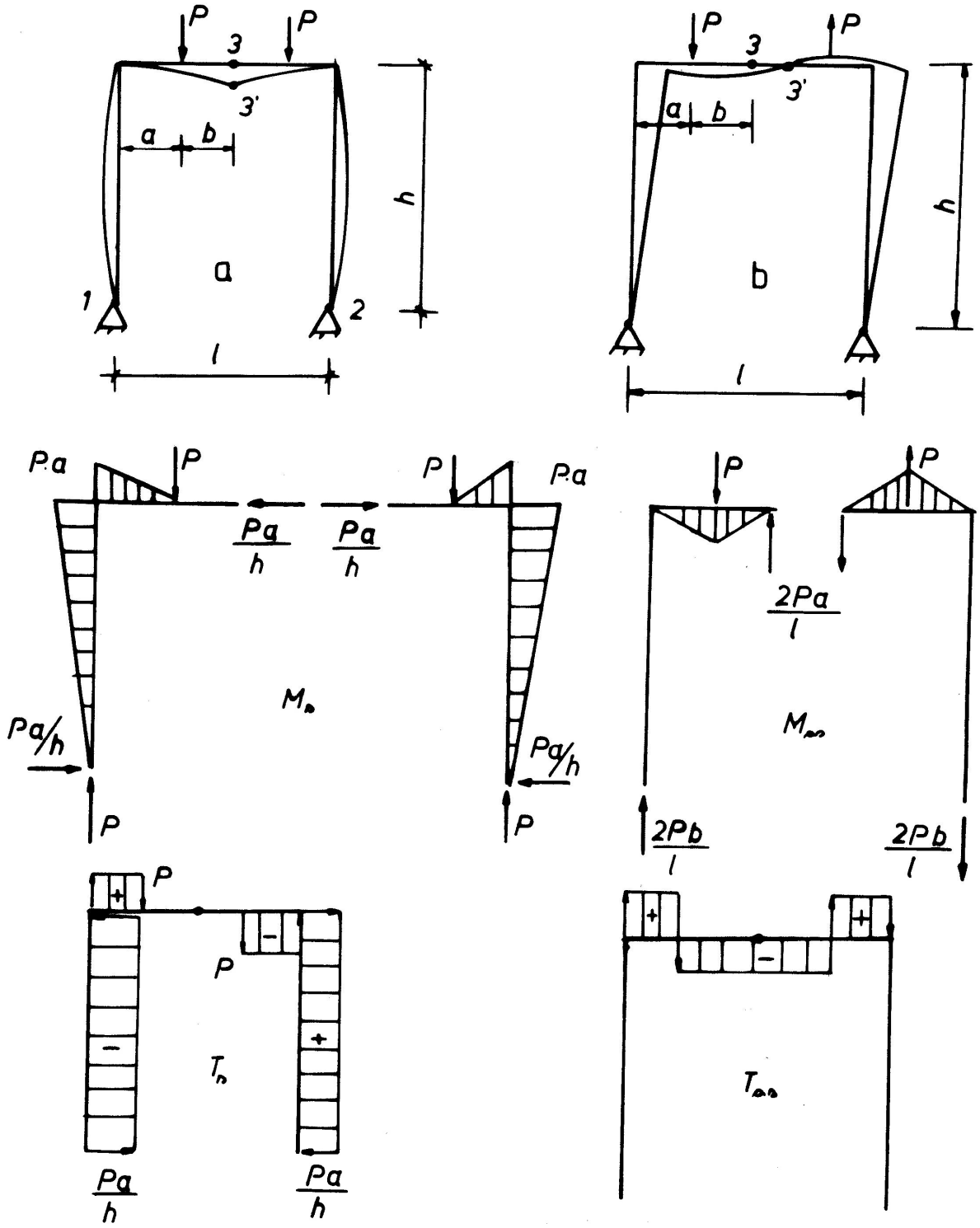


Fig.3.9 Diagrame de eforturi (M,T) pentru o structură simetrică încărcată simetric şi încărcată antisimetric

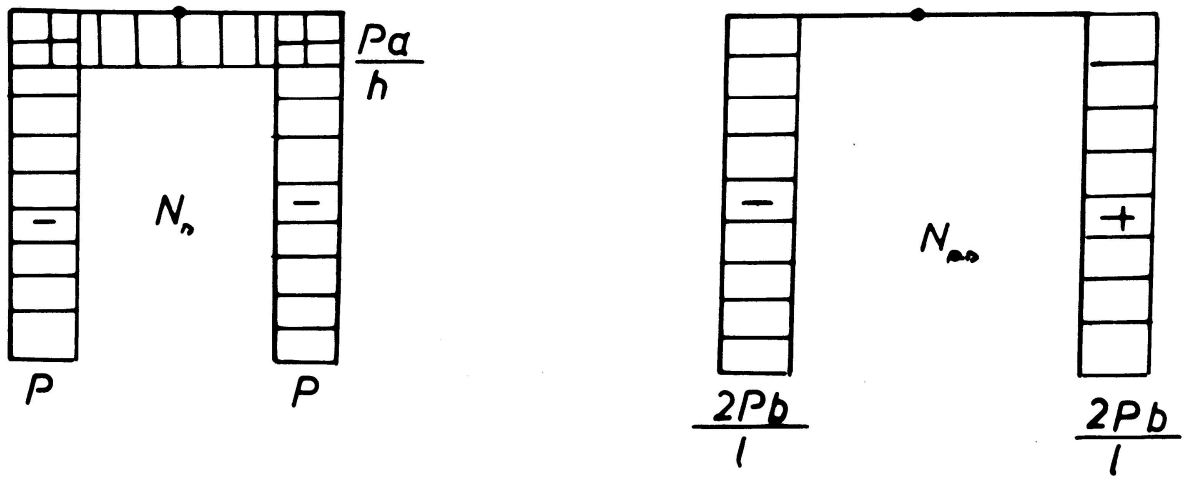


Fig.3.10 Diagrame de efort axial pentru încărcare simetrică şi antisimetrică

Situaţia de simetrie şi antisimetrie se regăseşte şi la eforturi. Considerînd forţele de legătură care trebuie introduse cînd se secţionează o bară se obţine situaţia din figura 3.9,3.10 din care se vede că perechile M şi N au caracter simetric, iar perechea T are caracter antisimetric. Aceasta înseamnă că pentru două secţiuni aşezate simetric, la o structură simetrică şi simetric încărcată, momentele încovoietoare şi forţele axiale sînt egale şi au acelaşi sens, în timp ce forţele tăietoare sînt egale, dar au sensuri contrare; aceasta deoarece perechile M,T,N trebuie să fie dispuse simetric faţă de axa de simetrie. Cînd structura ar fi încărcată antisimetric situaţia este inversă, anume momentele încovoietoare şi forţele axiale sînt egale şi cu sensuri contrare, iar forţele tăietoare sînt egale şi au acelaşi sens. Pentru o structură simetrică, încărcărilor simetrice le corespund diagrame M şi N simetrice precum şi diagrama T antisimetrică; încărcărilor antisimetrice le corespund diagrame M şi N antisimetrice, precum şi diagrama T simetrică.

Proprietăţile de simetrie şi antisimetrie ale reacţiunilor şi diagramelor de eforturi pot fi utilizate şi pentru sarcini oarecare, dacă se ţine seama că orice încărcare poate fi înlocuită printr-o încărcare simetrică şi o încărcare antisimetrică. Prin aceasta trasarea diagramelor de eforturi pentru încărcarea dată poate fi obţinută prin suprapunerea celor două serii de diagrame corespunzătoare componentelor încărcării. Desigur, folosind această cale, sînt de trasat mai multe diagrame, dar construcţia lor este mult mai simplă datorită tocmai utilizării simetriei şi antisimetriei.

Exemplul 1: Să se traseze diagramele de eforturi N,T,M pentru cadrul simetric static determinat din figura 3.11

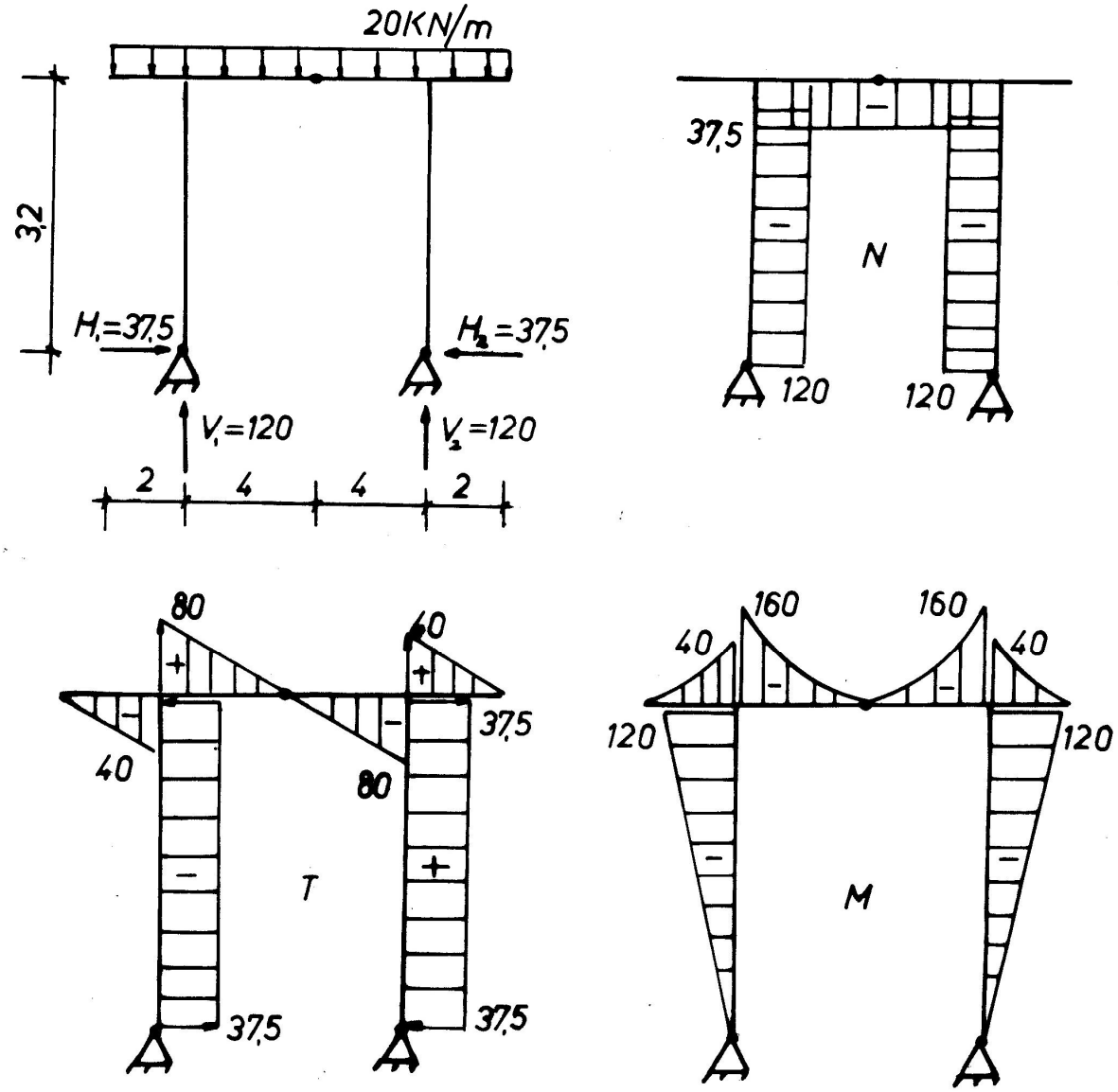


Fig. 3.11 Exemplu structură simetrică încărcată simetric

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 8 - 20 \cdot 10 \cdot 5 + 20 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \rightarrow V_1 = 120KN$$

$$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow -20 \cdot 2 \cdot 1 + 20 \cdot 10 \cdot 5 - V_2 \cdot 8 = 0 \rightarrow V_2 = 120KN$$

$$\left(\sum M\right)_3^{st} = 0 \rightarrow 120 \cdot 4 - H_1 \cdot 3{,}2 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \rightarrow H_1 = 37{,}5KN$$

$$\left(\sum M\right)_3^{dr} = 0 \rightarrow 20 \cdot 6 \cdot 3 - 120 \cdot 4 + H_2 \cdot 3{,}2 = 0 \rightarrow H_2 = 37{,}5KN$$

Exemplul 2: Să se traseze diagramele de eforturi N,T,M pentru cadrul simetric încărcat antisimetric din figura 3.12

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow -V_1 \cdot 24 + 2 \cdot 30 \cdot 6 = 0 \rightarrow V_1 = 15KN$$

$$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow 2 \cdot 30 \cdot 6 - V_2 \cdot 24 = 0 \rightarrow V_2 = 15KN$$

$$\left(\sum M\right)_3^{st} = 0 \rightarrow -15 \cdot 12 + H_1 \cdot 6 = 0 \rightarrow H_1 = 30KN$$

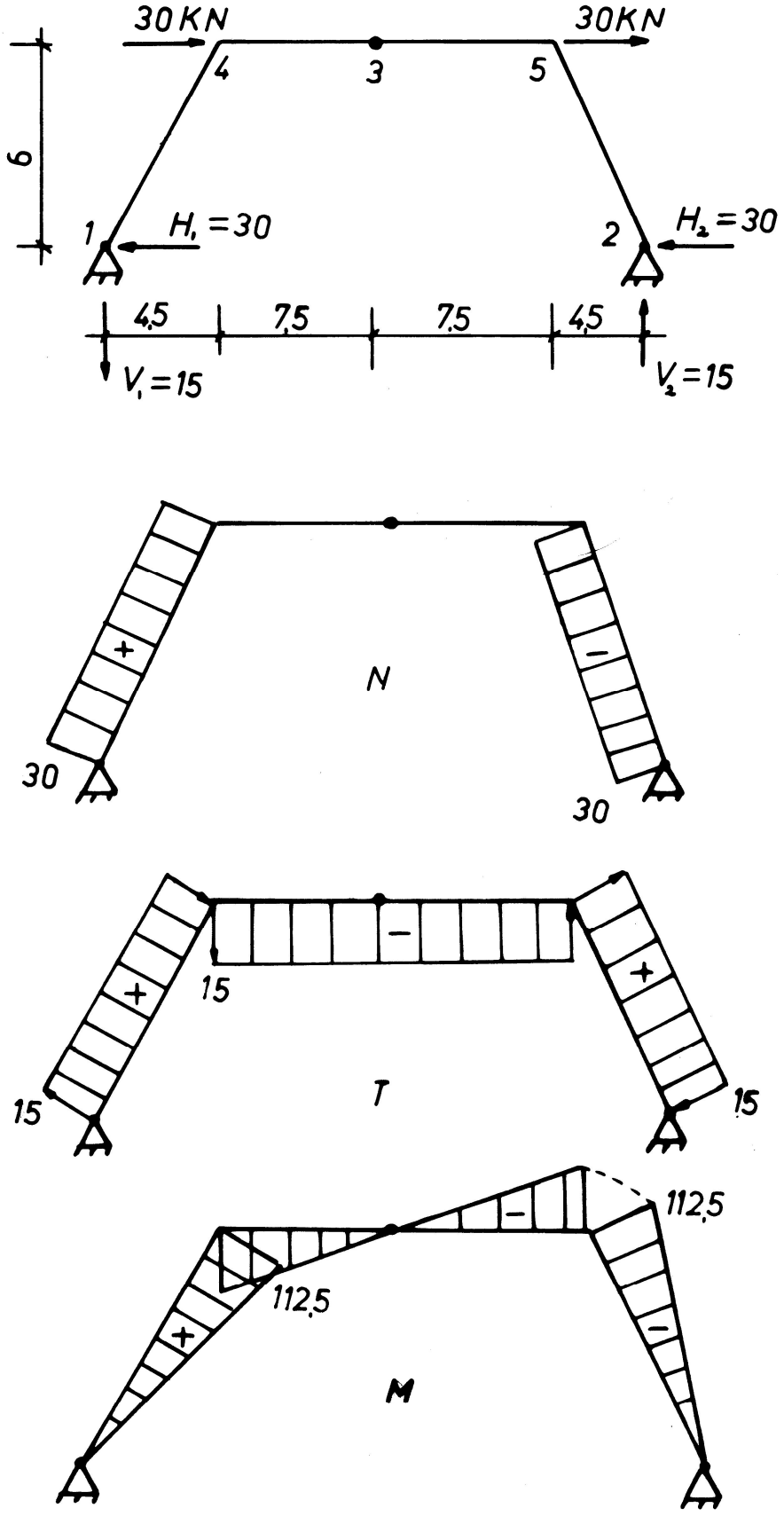


Fig.3.12 Structură simetrică încărcată antisimetric

$N_{14} = 15 \cdot \sin\alpha + 30 \cdot \cos\alpha$;

$\sin\alpha = 0{,}8$; $\cos\alpha = 0{,}6$

$N_{14} = 15 \cdot 0{,}8 + 30 \cdot 0{,}6 = 30$

$T_{14} = 30 \cdot 0{,}8 - 15 \cdot 0{,}6 = 15$

$M_4 = -15 \cdot 4{,}5 + 30 \cdot 6 = 112{,}5$

CAP.4 ARCE STATIC DETERMINATE

4.1 Generalităţi

În alcătuirea structurilor se întîlnesc deseori elemente de construcţii care prin schematizare se reduc la bare cu axă curbă. În aplicaţiile practice, asemenea bare au de obicei drept axă o curbă plană. Privitor la modul de aplicare al sarcinilor se pot distinge două situaţii:

(1) Sarcinile sînt cuprinse în planul curbei dirijate în general în sens opus convexităţii. Elementele de construcţie care se găsesc în această situaţie poartă numele de arce şi sînt întîlnite la susţinerea acoperişurilor de hale industriale, la poduri etc.

(2) Sarcinile acţionează normal pe planul axei barei; elementele de construcţie solicitate în acest mod poartă numele de grinzi curbe plane

La un arc este necesar în primul rînd să se aleagă sistemul de axe de referinţă pentru raportarea geometrică a arcului şi a sarcinilor aplicate. Faţă de acest sistem o secţiune oarecare i este definită prin coordonatele centrului său de greutate şi prin înclinarea tangentei la arc în acel punct.

Pentru definirea eforturilor din secţiune, se adoptă şi un sistem de axe propriu al secţiunii . Sistemul de axe este format din tangenta şi normala la arc, astfel că acest sistem variază de la o secţiune la alta în lungul arcului. Deoarece toate forţele exterioare (sarcini şi reacţiuni) acţionează în planul arcului rezultă că într-o secţiune oarecare i se vor dezvolta eforturile N_i,T_i,M_i;

Caracteristica esenţială a arcelor derivă din faptul că legăturile sînt dispuse astfel ca să împiedice sau să limiteze variaţia de distanţă dintre extremităţile barei curbe(sau dintre două puncte intermediare). Prin această dispunere a legăturilor, arcele dau împingeri laterale preluate de rezemări sau de tiranţi; se ajunge la o comportare avantajoasă sub acţiunea sarcinilor, rezultînd o reducere importantă a momentelor încovoietoare faţă de cazul grinzilor drepte.

Arcele static determinate sînt caracterizate prin numărul minim de legături necesar fixării în plan. Arcele sînt bare curbe sau sisteme de bare curbe plane, încărcate cu forţe acţionînd în planul lor. În practică, arcele se întîlnesc la baraje, acoperişurile halelor industriale, poduri etc.

În reazemele arcelor se dezvoltă reacţiuni care au componente orizontale denumite împingeri.

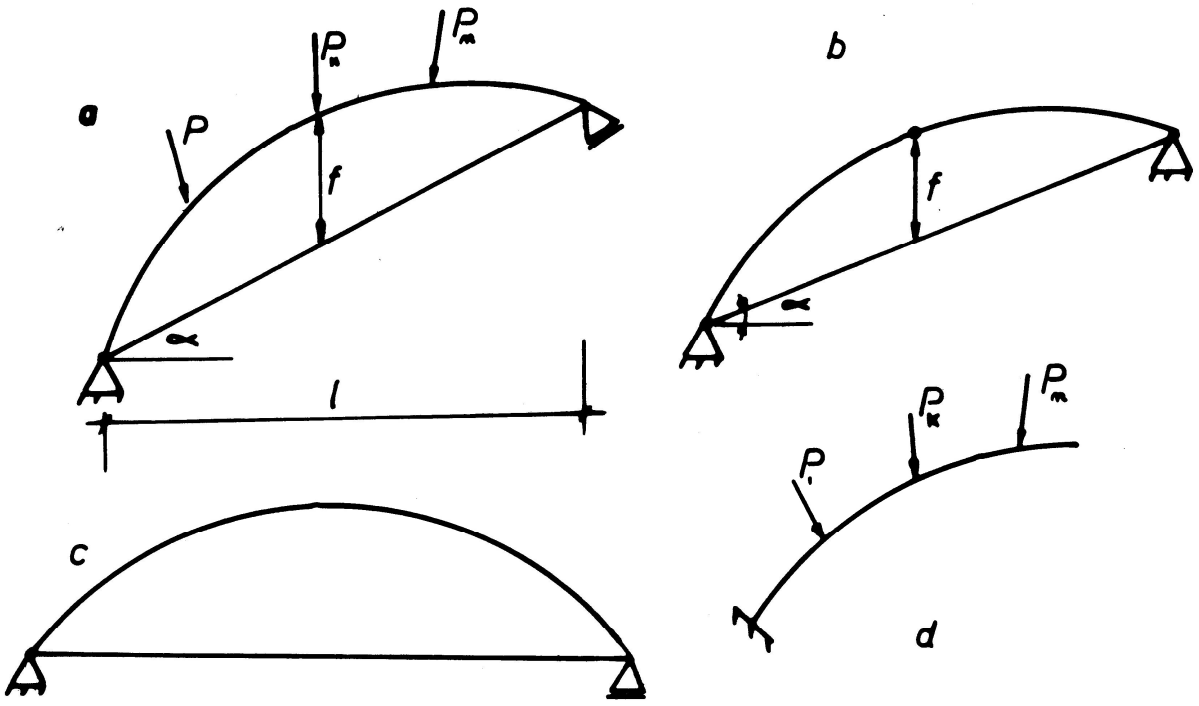


Fig.4.1 Tipuri de arce static determinate

Această caracteristică a arcelor conduce la o reducere importantă a momentelor încovoietoare , față de cazul grinzilor drepte, permițînd astfel folosirea arcelor la construcții cu deschideri mari. Împingerile laterale ale arcelor sînt preluate de elementele de rezemare. Cînd preluarea împingerilor nu se poate realiza în condiții economice, deoarece conduce la dimensini exagerate pentru elementele de reazem, între extremitățile arcului se introduce un tirant(fig.4.1c). Pentru ca arcul cu tirant sa fie static determinat este necesar ca unul din reazeme să fie simplu, pentru a compensa legătura suplimentară introdusă de tirant.

Secțiunile din reazemele exterioare 1 si 2 ale arcelor se numesc naşteri, iar dreapta ce uneşte cele două naşteri este linia naşterilor.

Punctul cel mai depărtat de linia naşterilor se numeşte cheia arcului; la arcele cu trei articulații, articulația interioară coincide cu cheia arcului.

Distanța verticală de la cheia arcului la linia naşterilor se numeşte sageata arcului şi se notează cu f, iar dișțanta orizotală între naşterile arcului reprezintă deschiderea arcului şi se noteaza cu l.

Structura din figura 4.2d este o bară curbă încastrată la un capat si nu se poate considera arc, deoarece nu are împiedicată variația distanței între extremități şi prin urmare este o structură fără împingeri.

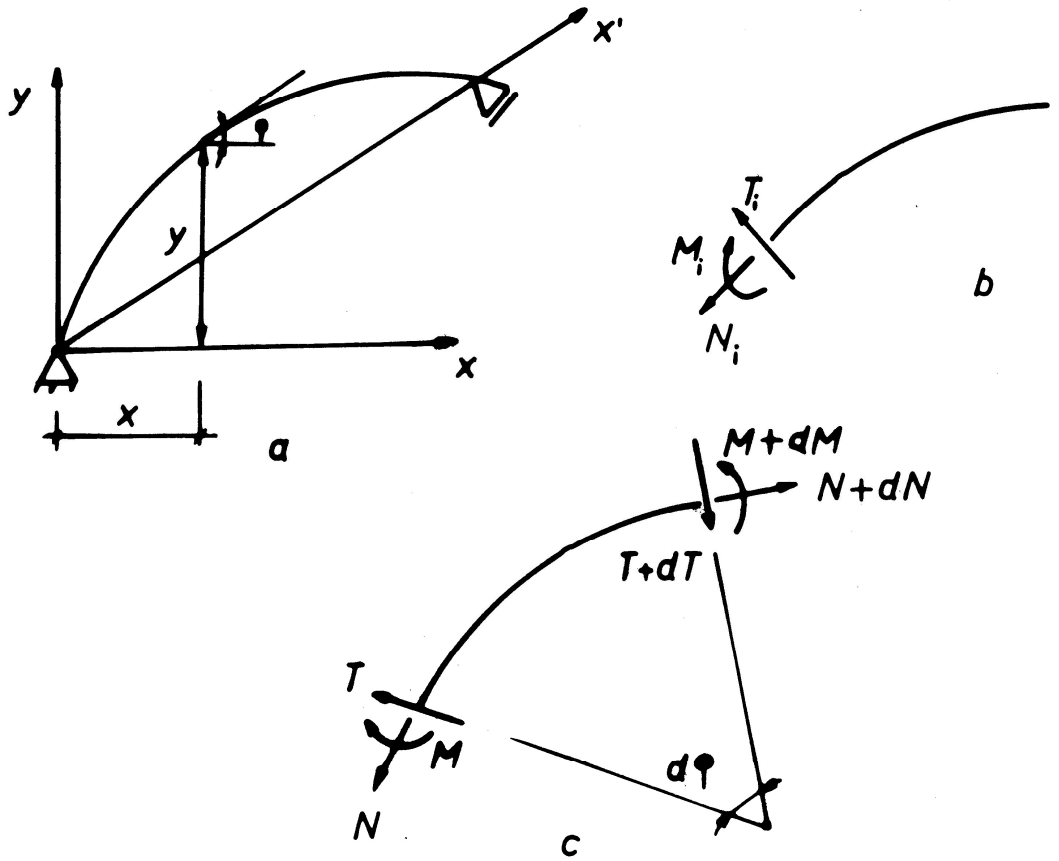


Fig.4.2 Prezentarea eforturilor secționale

Arcul cu o articulație şi reazem simplu nu se foloseşte în construcții în mod obişnuit , el constituie însa structura de baza pentru calculul arcelor plane static nedeterminate prin metoda forțelor. Arcul cu trei articulații se foloseşte frecvent în construcții, singur sau împreună cu alte elemente, formînd structuri static determinate din bare drepte si curbe.

Pentru calculul arcelor se consideră un sistem de axe de coordonate , față de care arcul sa fie definit prin coordonatele x_i, y_i ale centrului de greutate al sectiunii i şi prin înclinarea φ_i a tangentei la arc

în secțiunea respectivă(fig.4.2a). Sistemul de axe de coordonate se mai poate alege şi cu axa x' dirijată după linia naşterilor, iar axa y verticală.

Momentul încovoietor care întinde fibra interioară a arcului se consideră pozitiv. Convenția de semne pentru forța tăietoare şi axială este identică cu cea de la barele drepte.

4.2 Relații diferențiale între acțiuni şi eforturi

Pentru a demonstra relațiile diferențiale între acțiuni şi eforturi la arc se izolează din acesta un element infinit mic de lungime ds. Asupra elementului de arc acționează o forță uniform distribuită p care are componentele dupa normala p_n şi după tangenta p_t şi eforturile pozitive pe cele două fețe ale elementului (fig.4.3). Scriind ecuațiile de echilibru static pentru elementul de arc se obțin relațiile diferențiale între acțiuni şi eforturi. Ecuația de echilibru după tangenta la arc în secțiunea din dreapta a elementului are forma:

$$(4.1a)\ldots N + dN - N\cos d\varphi - T\sin d\varphi$$

$$+ p_t ds\cos\frac{d\varphi}{2} + p_n ds\sin\frac{d\varphi}{2} = 0$$

iar ecuația de proiecție după normala la arc în secțiunea din dreapta a elementului este:

$$(4.1b)\ldots T + dT - T\cos d\varphi + N\sin d\varphi + p_n ds\cos\frac{d\varphi}{2} -$$

$$p_t ds\sin\frac{d\varphi}{2} = 0$$

Ecuația de momente în raport cu centrul de greutate al secțiunii din dreapta elementului de arc:

$$(4.1c)\ldots M - M - dM + T\rho\sin d\varphi - N\rho(1-\cos d\varphi) +$$

$$p_t ds\rho(1-\cos\frac{d\varphi}{2}) - p_n ds\rho\sin\frac{d\varphi}{2} = 0$$

Dacă în relațiile(4.1a,b,c) se ține seama de faptul ca unghiul dφ este infinit mic, se pot admite cos dφ=1 şi sin dφ=dφ=ds/ρ; neglijînd infiniții mici de ordinul doi rezultă:

$$(4.2)\ldots \frac{dN}{ds} = -p_t + \frac{T}{\rho};\frac{dT}{ds} = p_t - \frac{N}{\rho};\frac{dM}{ds} = T$$

Se observă că relația care dă derivata momentului este identică cu relația de la bara dreaptă. Rezultă că şi la arce, momentul încovoietor va fi maxim sau minim în secțiunile în care forța tăietoare se anulează.

Analizînd relațiile diferențiale ale forței axiale şi tăietoare se constată ca ele sînt mai generale decît aceleaşi relații de la bara dreaptă , care se pot deduce din relațiile (4.2), considerînd raza de curbură a arcului ρ=∞. Relațiile (4.2) sînt valabile atît pentru arcele static determinate , cît şi pentru cele static nedeterminate, deoarece la deducerea lor nu s-au impus restricții în acest sens.

4.3 Arcul cu trei articulații. Calculul reacțiunilor şi al eforturilor

Se consideră arcul cu trei articulații (fig.4.3) încărcat cu un sistem de forțe oarecare P_i.

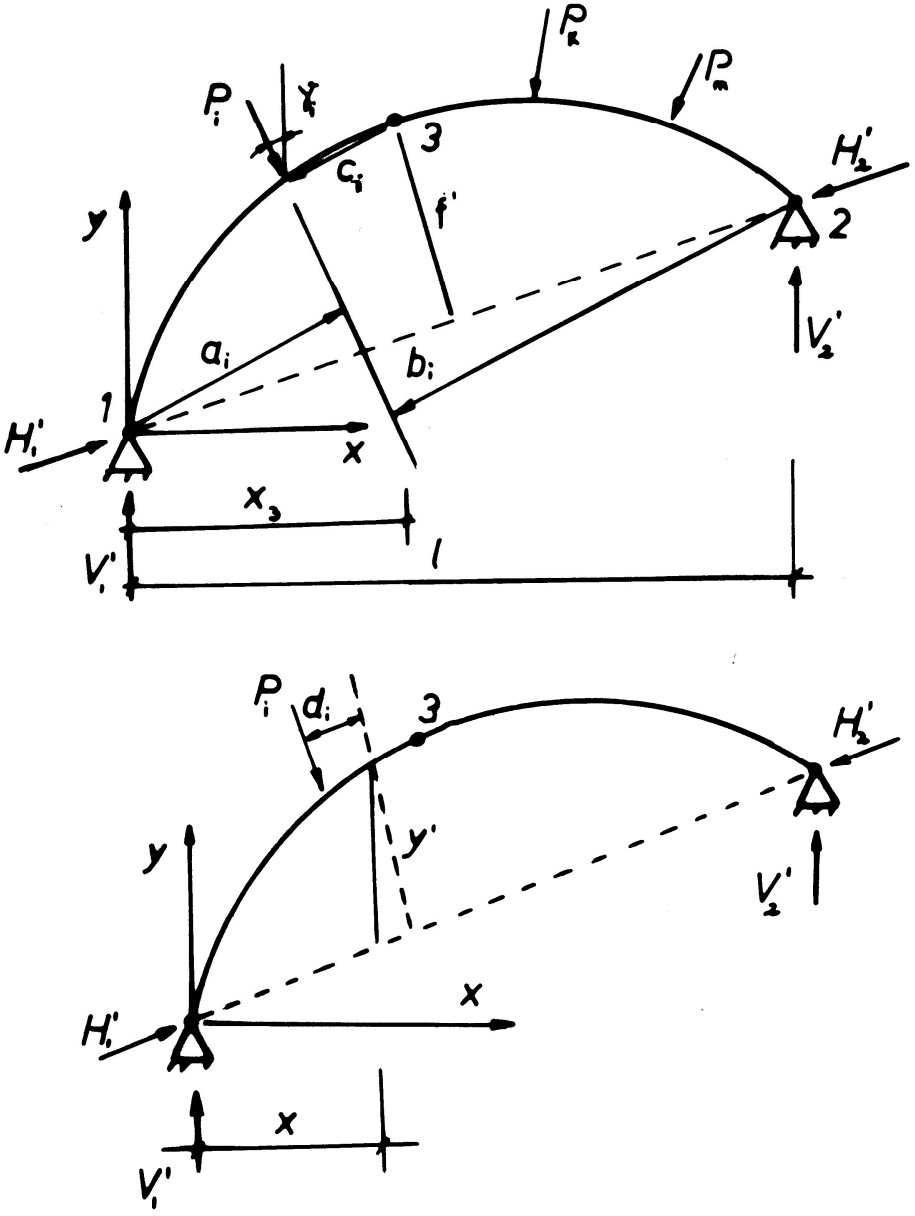


Fig.4.3 Arcul cu trei articulații

Reacțiunile se consideră descompuse în componentele verticale V_1' şi V_2' şi componentele după direcția 1-2, H_1' şi H_2'. Scriindu-se ecuațiile de momente în raport cu punctele 1 şi 2 se obțin direct reacțiunile V_1' şi V_2'.

$$(4.3)\ldots\sum M_2 = 0,\ldots V_1' f - \sum P_i b_i = 0,\ldots V_1' = \frac{\sum P_i b_i}{l}$$

$$\sum M_1 = 0,\ldots \sum P_i a_i - V_2' l = 0,\ldots V_2' = \frac{\sum P_i a_i}{l}$$

$$\sum M_3^{st} = 0,\ldots V_1' x_3 - H_1' f' - \sum P_i c_i = 0,$$

$$H_1' = \frac{V_1' x_3 - \sum P_i c_i}{f'}$$

$$\sum X_i = 0,(H_1' - H_2')\cos\alpha + \sum P_i \sin\gamma_i = 0,$$

$$H_2' = \frac{H_1'\cos\alpha + \sum P_i \sin\gamma_i}{\cos\alpha}$$

La fel ca în cazul cadrelor după determinarea reacțiunilor se trece la calculul eforturilor. Eforturile din secțiunea curentă se pot obține sub forma unor expresii care pot fi utilizate în orice secțiune "x".

Efortul axial N se obține proiectînd toate forțele, din stînga secțiunii de calcul, pe direcția tangentei la curbă în secțiunea considerată, iar forța tăietoare se obține proiectînd forțele pe direcția normalei la curbă în secțiunea considerată.

$$(4.4)\ldots N_x = -H_1'\cos(\varphi - \alpha) - V_1'\sin\varphi + \sum P_i \sin(\varphi - \gamma_i)$$

$$T_x = V_1'\cos\varphi - H_1'\sin(\varphi - \alpha) - \sum P_i \cos(\varphi - \gamma_i)$$

$$M_x = xV_1' - y'H_1' - \sum P_i d_i$$

Arcele cu reazemele la acelaşi nivel reprezintă cazul cel mai întîlnit în practica curentă (α=0, y'=y şi f'=f) şi încărcate cu forţe verticale (γ_i=0)expresiile reacţiunilor şi ale eforturilor capătă formele uzuale.

Reacțiunile au expresiile:

$$(4.5)\ldots V_1 = \frac{\sum P_i b_i}{l}, \ldots V_2 = \frac{\sum P_i a_i}{l},$$

$$H_1 = H_2 = H = \frac{M_3^{\,0}}{f}$$

unde a_i şi b_i se măsoară pe orizontală, iar $M_3^{\,0}$ reprezintă momentul încovoietor în secțiunea 3 pe o grindă simplu rezemată avînd aceeaşi deschidere şi aceleaşi încărcări verticale ca şi arcul.

Eforturile au expresiile:

$$(4.6)\ldots -H_1\cos\varphi - V_1\sin\varphi + \sum P_i \sin\varphi = -T_x^{\,0}\sin\varphi$$

$$-H_1\cos\varphi$$

$$T_x = V_1\cos\varphi - H_1\sin\varphi - \sum P_i\cos\varphi = T_x^{\,0}\cos\varphi - H_1\sin\varphi$$

$$M_x = xV_1 - yH_1 - \sum P_i d_i = M_x^{\,0} - yH$$

unde $T_x^{\,0} = V_1 - \sum P_i$ şi $M_x^{\,0} = x \cdot V_1 - \sum P_i d_i$ reprezintă forța tăietoare şi respectiv momentul încovoietor în secțiunea curentă pe grinda simplu rezemată corespunzătoare.

Relațiile (4.6) se folosesc la trasarea diagramelor de eforturi la arce triplu articulate cu reazeme la acelaşi nivel şi încărcate cu forțe verticale. După cum se observă, din ultima relație, din (4.6), diagrama de moment încovoietor se obține prin suprapunerea diagramei pe grinda simplu rezemată cu o diagramă ce reprezintă suprafața cuprinsă între curbă şi linia reazemelor , cele două diagrame avînd puncte comune în secțiunile în care sînt plasate cele trei articulații.

4.4 Arcul cu tirant

Arcul cu tirant este folosit în cazul în care elementele de fundație nu pot prelua împingerile arcului cu trei articulații,.

Se consideră arcul cu tirant din fig.4.4.

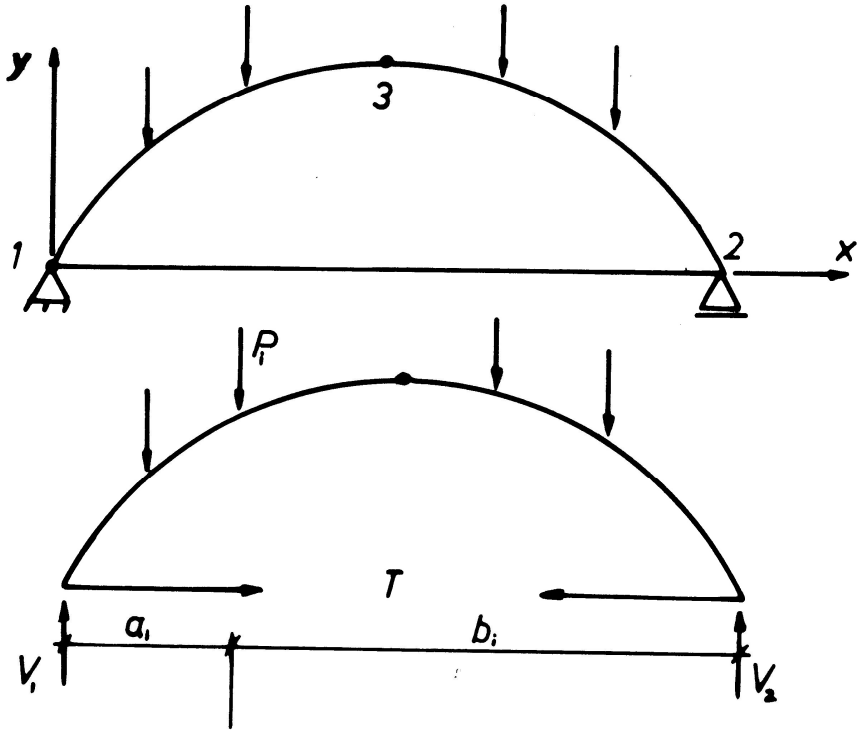


Fig.4.4 Arcul cu tirant

Se scrie condiția de echilibru pe orizontală, scrisă pentru întregul ansamblu, rezultă H_1=0. Reacțiunile verticale se obțin din ecuații de momente în raport cu punctele 1 şi 2.

$$(4.7)\ldots\sum M_1 = 0, \sum P_i a_i - V_2 l = 0, V_2 = \frac{\sum P_i a_i}{l}$$

$$\sum M_2 = 0, \ldots V_1 l - \sum P_i b_i = 0, V_1 = \frac{\sum P_i b_i}{l}$$

Efortul de întindere,din tirant, se determină din condiția de moment încovoietor egal cu zero în raport cu articulația interioară 3.

$$\sum M_3^{st} = 0, \ldots V_1 \cdot \frac{l}{2} - \sum P_i c_i - T \cdot f = 0, \ldots T = \frac{M_3^0}{f}$$

Astfel, împingerea orizontală a arcului cu trei articulații este egală cu efortul din tirant.

4.5 Arcul de coincidență

Arcul de coincidență, este arcul la care, pentru o încărcare uniform distribuită, momentul încovoietor este egal cu zero în orice secțiune.

Este necesar să se determine ecuația arcului de coincidență cu trei articulații, încărcat cu o forță uniform distribuită pe toată deschiderea (fig.4.5). Sistemul de axe are originea în reazemul 1.

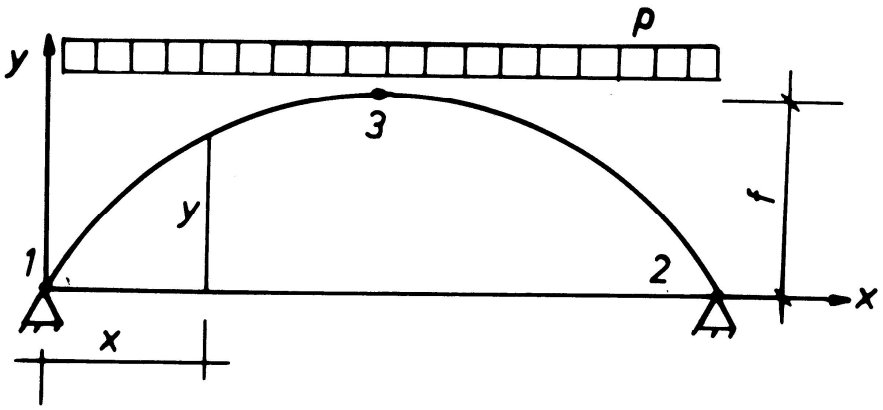


Fig.4.5 Arc cu trei articulaţii încărcat cu o sarcină uniform distribuită

Pentru obţinerea ecuaţiei arcului se exprimă momentul încovoietor în secţiunea curentă şi se impune condiţia ca , pentru orice valoare a variabilei , momentul încovoietor să fie egal cu zero.

Se calculează mai întîi reacţiunile: $V_1 = V_2 = \frac{pl}{2}$

$$(4.8)\ldots \sum M_3^{st} = 0,\ldots \frac{pl}{2}\frac{l}{2} - p\frac{l}{2}\frac{l}{4} - H_1 f = 0$$

Rezultă:

$$H_1 = \frac{pl^2}{8f}$$

Momentul încovoietor în secţiunea curentă:

$$M_x = p \cdot \frac{l}{2} \cdot x - p \cdot x \cdot \frac{x}{2} - \frac{pl^2}{8f} \cdot y$$

Punînd condiţia M_x=0 rezultă:

$$y = \frac{4fx}{l^2}(l - x)$$

Curba y este o parabolă simetrică ce trece prin punctele 1,2,3.

Ne propunem să determinăm ecuaţia arcului cu trei articulaţii încărcat cu o presiune normală la curbă şi de intensitate constantă p, pentru care diagrama de moment este egală cu zero. (fig.4.6).

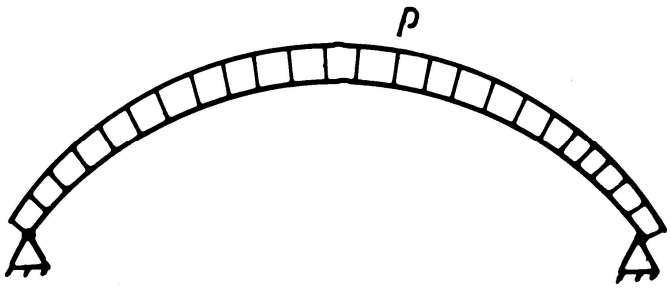


Fig.4.6 Arc cu trei articulaţii încărcat cu o presiune normală la curbă

În acest sens se utilizează relaţiile între eforturi şi încărcări. Astfe, rezultă T=0 deoarece arcul este de coincidenţă şi respectă condiţia M_x=0. Deoarece T=0 şi p_t=0 rezultă că N este constant. Astfel se obţine $p_n = -\frac{N}{\rho}$

Deoarece p_n =ct. şi N=ct. rezultă că $\rho = ct$ deci $\rho = R$ şi în consecinţă ecuaţia arcului este un arc de cerc, deoarece are raza de curbură constantă. Dacă presiunea s-ar exercita la interior forţa axială ar fi de întindere.

Ecuaţia arcului parabolic se mai poate obţine pornind de la expresia $y=ax^2+bx+c$ unde a,b,c sînt nişte constante care se determină din condiţiile reale ale arcului cu trei articulaţii.
Condiţiile pentru determinarea constantelor a,b şi c sînt:
-pentru x=0, y=0
-pentru x=l,y=0
-pentru x=l/2, y=f
Din prima condiţie rezultă c=0. Din a doua condiţie rezultă $0=al^2+bl$, deci b=-al. Din a treia condiţie rezultă $f=al^2/4+bl/2$, de unde se obţine succesiv: $a=-4f/l^2$ şi b=4f/l.
Ecuaţia curbei ,raportată la sistemul de axe cu originea în punctul 1, este:

$$y = -\frac{4f}{l^2}x^2 + \frac{4f}{l}x \text{ sau } y = \frac{4fx}{l^2}(l-x)$$

deci aceeaşi formă care a fost obţinută şi la arcul de coincidenţă pentru încărcarea verticală uniform distribuită pe orizontală.

Exemplul 1:

Să se traseze diagramele de moment încovoietor, forţă tăietoare şi efort axial pentru arcul din fig. 4.7

Rezolvarea arcului începe prin rezolvarea unei grinzi simplu rezemate corespunzătoare,de aceaşi lungime şi cu aceaşi încărcare ca şi arcul, în sensul determinării reacţiunilor şi trasării diagramelor de forţă tăietoare şi moment încovoietor.

Reacţiunea orizontală H a arcului se obţine ca raportul dintre momentul pe grinda dreaptă simplu rezemată, în dreptul cheii arcului, raportat la săgeata arcului.

$$H = \frac{M_3^0}{f} = \frac{600}{5} = 120KN$$

În relaţiile de mai jos N_x, T_x reprezintă efortul axial respectiv forţa tăietoare într-o secţiune aflată la cota x a arcului. T_x^0 reprezintă forţa tăietoare , la cota x, pe grinda dreaptă simplu rezemată.

$$N_x = -T_x^0 \sin\phi - H\cos\phi$$

$$T_x = T_x^0 \cos\phi - H\sin\phi$$

De fapt diagrama de moment încovoietor pe arc rezultă ca diferenţa între diagrama M_x^0 şi diagrama Hy, cu condiţia ca în cele trei secţiuni unde sînt articulaţii, momentul încovoietor să fie egal cu zero. În acest caz diagrama Hy are ordonate mai mari decît diagrama M_x^0, deci momentul încovoietor întinde fibra exterioară (este negativ).

$$M_x = M_x^0 - H \cdot y$$

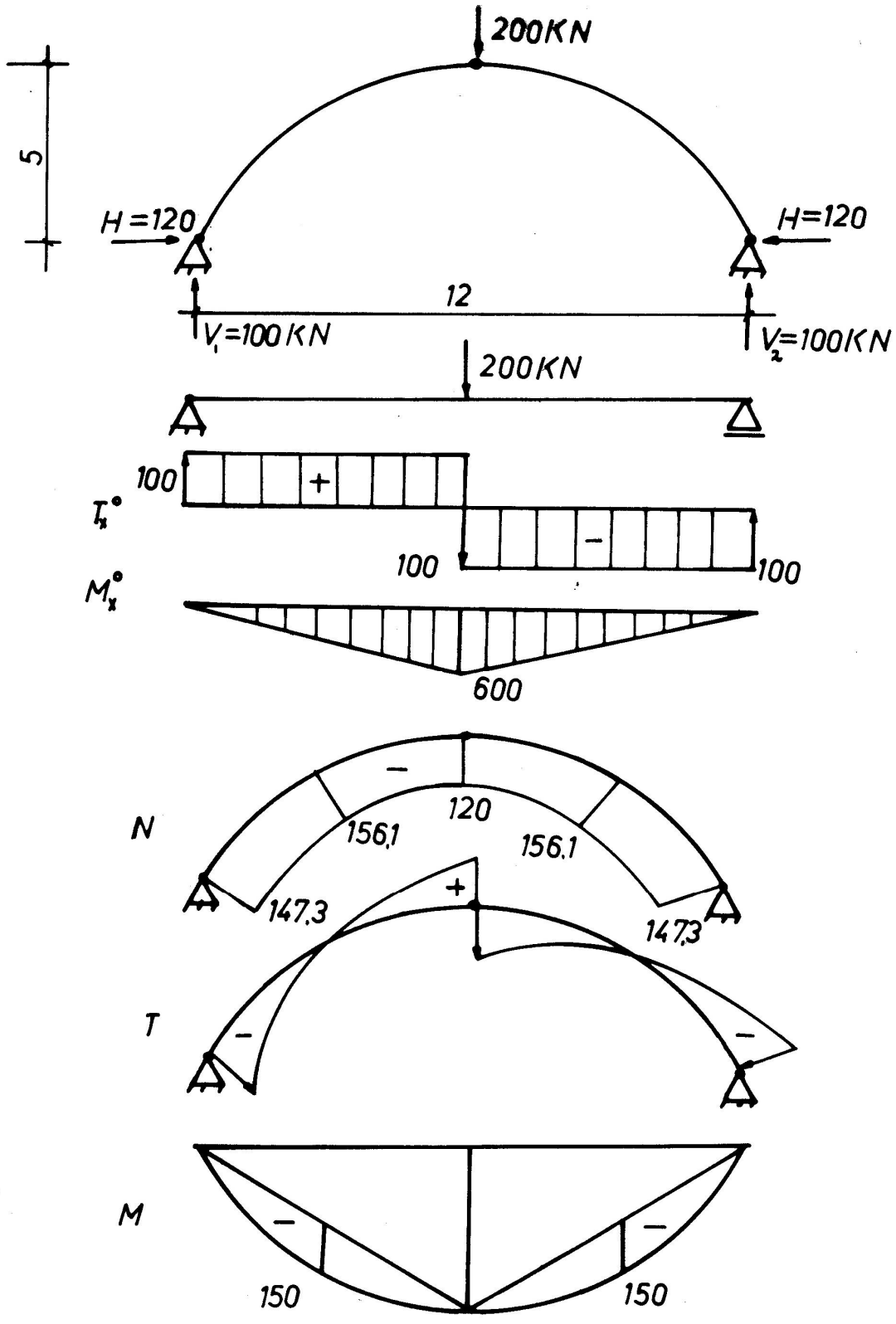


Fig 4.7 Reprezentarea diagramelor de eforturi pentru un arc triplu articulat

De obicei efortul axial, forța tăietoare şi momentul încovoietor se calculează la naşteri la cheie şi la sfert, urmînd ca diagramele să se traseze unind aceste puncte. În cazul în care pe arc acționează şi forțe concentrate efortul axial şi forța tăietoare se calculează la stînga şi la dreapta punctului de acțiune a forței concentrate.

În fiecare punct în care se face calculul eforturilor este necesar ca în prealabil să se determine unghiul pe care îl face tangenta în acel punct cu orizontala. Tangenta unghiului într-un punct este egală cu derivata ecuației arcului.

$$tg\phi_1 = \frac{4f}{l^2}(l-2x), \ldots tg\phi_1 = \frac{4\cdot 5}{12^2}12 = 1{,}66 \rightarrow \phi_1 = \text{arctg}1{,}66$$

$$\phi_1 = 59{,}03^0$$

$$\sin\phi_1 = 0{,}857; \ldots \cos\phi_1 = 0{,}514$$

Efortul axial şi forța tăietoare se calculează prin intermediul relațiilor 4.6

$$N_1 = -100\cdot 0{,}857 - 120\cdot 0{,}514 = -147{,}38KN$$

$$T_1 = 100\cdot 0{,}514 - 120\cdot 0{,}857 = -51{,}44KN$$

$$N_3 = -H = -120KN$$

$$T_3^{st} = 100KN$$

$$y_4 = \frac{4f}{l^2}x(l-x) = \frac{4\cdot 5}{12^2}\cdot 3\cdot(12-3) = 3{,}75m$$

$$x = 3.0$$

$$tg\phi_4 = \frac{4f}{l^2}(l-2x) = \frac{4\cdot 5}{12^2}(12-2\cdot 3) = 0{,}833$$

$$\phi_4 = 39{,}80^0 \ldots \sin\phi_4 = 0{,}640 \ldots \cos\phi_4 = 0{,}768$$

$$N_4 = -100\cdot 0{,}640 - 12\cdot 0{,}768 = 156{,}1KN$$

$$T_4 = 100\cdot 0{,}768 - 120\cdot 0{,}64 = 0$$

$$M_4 = M_x{}^0 - H\cdot y = 300 - 120\cdot 3{,}75 = -150$$

Exemplul 2: Să se traseze diagramele de moment încovoietor, forță tăietoare şi efort axial pentru arcul din fig. 4.8

Inițial se rezolvă grinda simplu rezemate corespunzătoare,de aceaşi lungime şi cu aceaşi încărcare ca şi arcul, în sensul determinării reacțiunilor şi trasării diagramelor de forță tăietoare şi moment încovoietor.

Reacțiunea orizontală H a arcului se obține ca raportul dintre momentul pe grinda dreaptă simplu rezemată, în dreptul cheii arcului, raportat la săgeata arcului.

Reacțiunile pe grinda echivalentă se determină prin scrierea ecuațiilor de echilibru static.

$$(\sum M)_2 = 0 \rightarrow V_1\cdot 12 - 15\cdot 6\cdot 9 = 0 \rightarrow$$

$$V_1 = 67{,}5KN$$

$$(\sum M)_1 = 0 \rightarrow 15\cdot 6\cdot 3 - V_2\cdot 12 = 0 \rightarrow$$

$$V_2 = 22{,}5KN$$

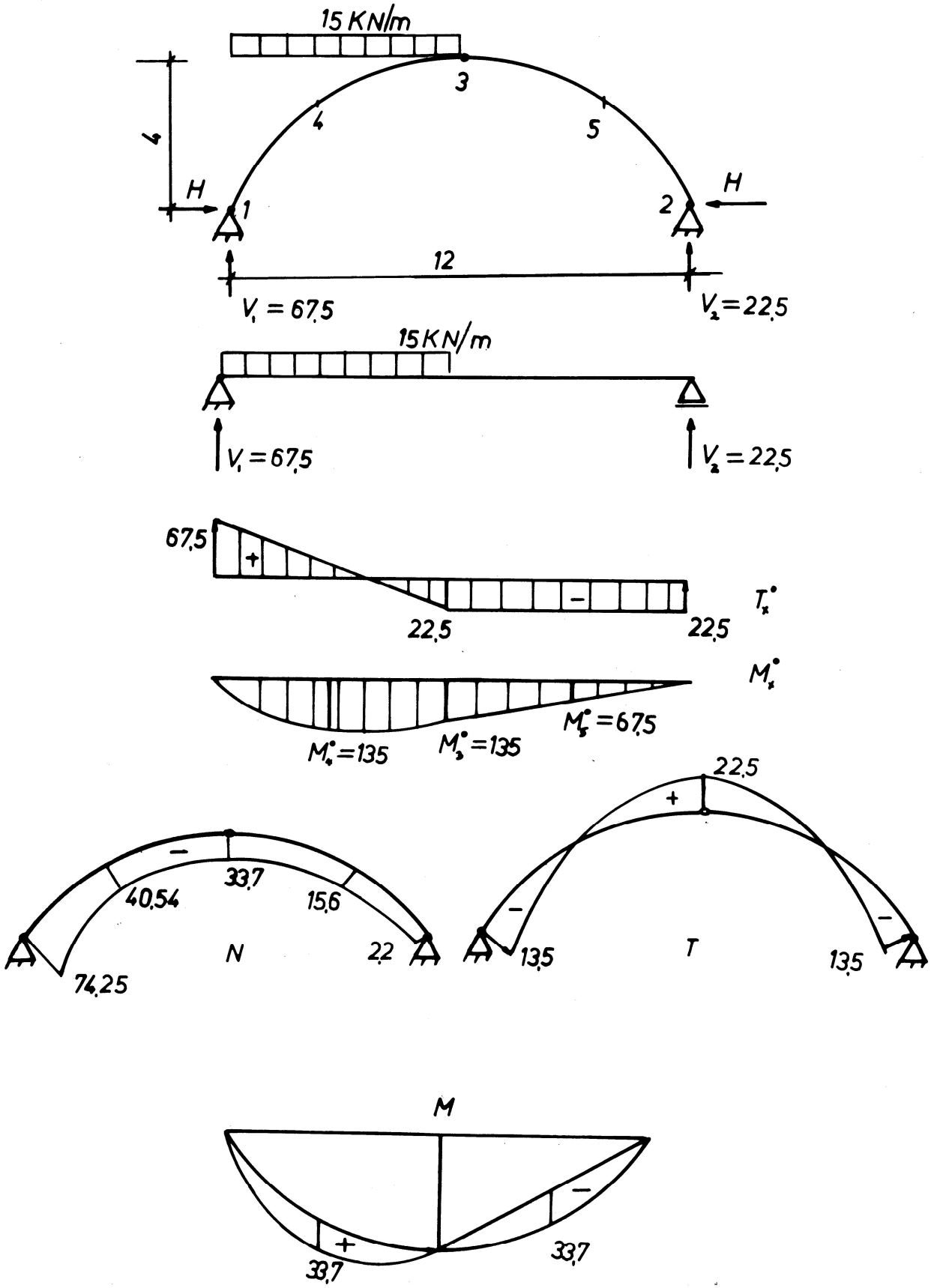


Fig.4.8 Diagrame de eforturi pentru un arc triplu articulat

Cele două reacțiuni orizontale ale arcului sînt egale deoarece arcul are reazemele la acelaşi nivel.

$$H = \frac{M_3^{\ 0}}{f} = \frac{135}{4} = 33{,}75KN$$

Punct 1

Inițial se determină valoarea unghiului pe care o face tangenta în punctul 1 cu orizontala.

$\phi_1 = 53{,}06$

$\sin\phi_1 = 0{,}8$

$\cos\phi_1 = 0{,}6$

Efortul axial şi forța tăietoare se determină aplicînd relațiile (4.6).

$N_1 = -67{,}5 \cdot 0{,}8 - 33{,}75 \cdot 0{,}6 = -74{,}25\,\text{KN}$

$T_1 = 67{,}5 \cdot 0{,}6 - 33{,}75 \cdot 0{,}8 = -13{,}5\,\text{KN}$

Punct 4

$N_4 = -22{,}5 \cdot 0{,}554 - 33{,}75 \cdot 0{,}832 = -40{,}54$

$T_4 = 22{,}5 \cdot 0{,}832 - 33{,}75 \cdot 0{,}554 = 0$

$M_4 = 135 - 33{,}75 \cdot 3 = 33{,}75$

Punct 3 (tangenta cu orizontala face un unghi egal cu zero)

$N_3 = -33{,}75$

$T_3 = 22{,}5$

Punct 5

Unghiurile sînt calculate după procedeul cunoscut determinînd mai întîi valoarea tangentei unghiului.

$\sin\phi_5 = 0{,}554$

$\cos\phi_5 = -0{,}832$

$N_5 = -22{,}5 \cdot 0{,}554 + 33{,}75 \cdot 0{,}832 = 15{,}61$

$T_5 = 22{,}5 \cdot 0{,}832 - 33{,}75 \cdot 0{,}554 = 0$

$M_5 = 67{,}5 - 33{,}75 \cdot 3 = -33{,}75$

Punct 2

$\sin\phi_2 = 0{,}8$

$\cos\phi_2 = -0{,}6$

$N_2 = 22{,}5 \cdot 0{,}8 - 33{,}75 \cdot 0{,}6 = -2{,}25$

$T_2 = 22{,}5 \cdot 0{,}6 - 33{,}75 \cdot 0{,}8 = -13{,}5$

Diagramele de eforturi au fost trasate în figura 4.8 pe baza valorilor calculate la naşteri, cheie şi la sfert. Diagrama de moment se obține ca diferența dintre diagrama de moment pe grinda dreaptă simplu rezemată şi ecuația arcului.

Exemplul 3. Să se traseze diagramele de moment încovoietor, forță tăietoare şi efort axial pentru arcul din fig. 4.9

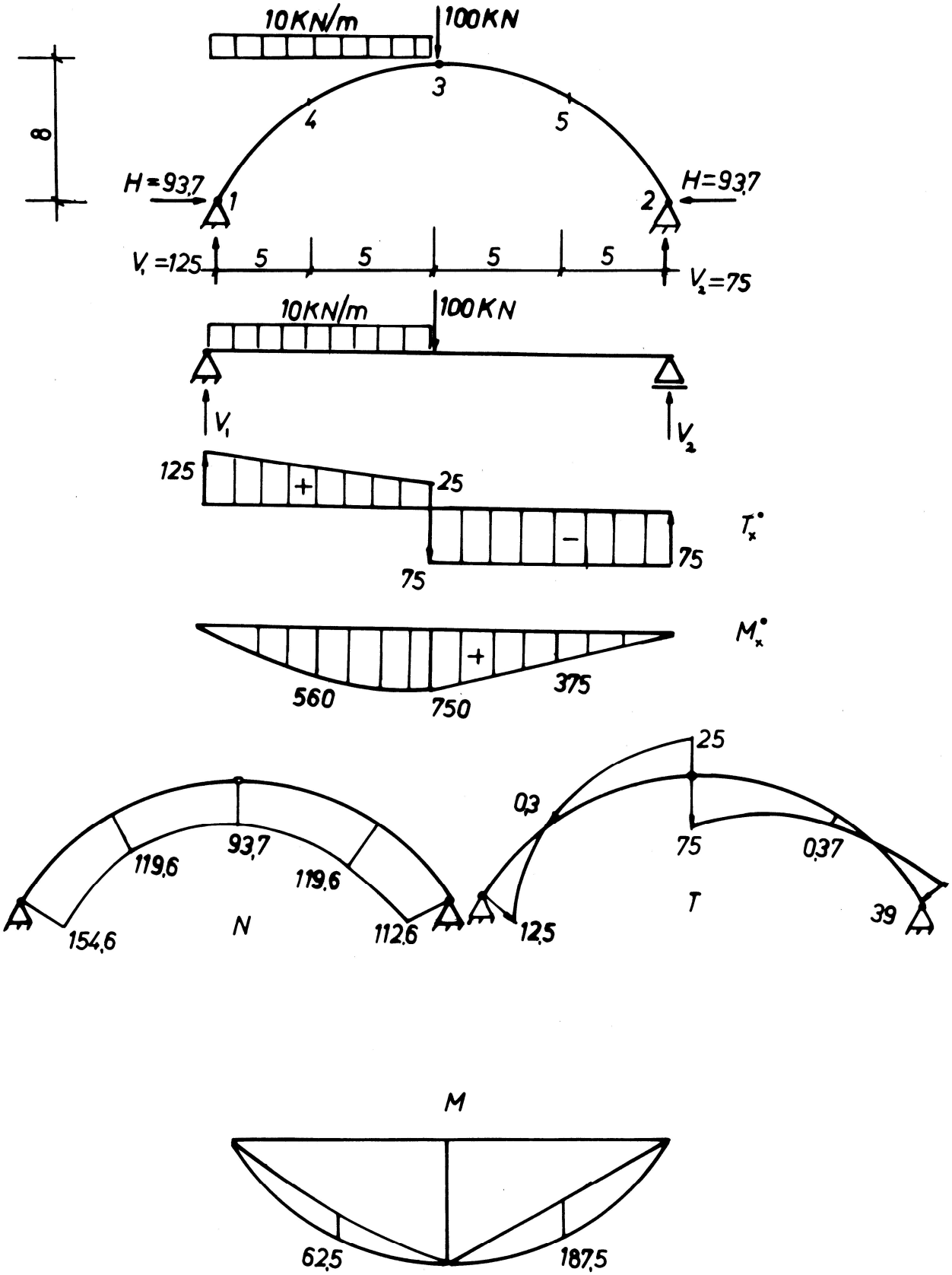


Fig.4.9Diagrame de eforturi pentru un arc triplu articulat

Reacțiunile V_1 şi V_2 se obțin prin scrierea ecuațiilor de momente în nodurile 1 şi 2 pe grinda dreaptă echivalentă, ele fiind aceleaşi şi pentru arc.

$(\sum M)_2 = 0 \rightarrow$

$V_1 \cdot 20 - 10 \cdot 10 \cdot 1{,}5 - 100 \cdot 10 = 0 \rightarrow V_1 = 125KN$

$(\sum M)_1 = 0 \rightarrow$

$10 \cdot 10 \cdot 5 + 100 \cdot 10 - V_2 \cdot 20 = 0 \rightarrow V_2 = 75KN$

$M_4{}^0 = 125 + 10 \cdot \frac{5^2}{2} = 500KNm$

$M_3{}^0 = 750KNm$

Reacțiunile orizontale ale arcului se determină ca fiind raportul dintre momentul la cheie şi săgeata arcului.

$H = \frac{M_3{}^0}{f} = \frac{750}{8} = 93{,}75KN$

Punctul 1: Efortul axial şi forța tăietoare se determină prin intermediul relațiilor 4.6.

$tg\phi_1 = \frac{4f}{l^2}(l - 2x) = \frac{4 \cdot 8}{20^2}(20 - 2 \cdot 0) = 1{,}6$

$\phi_1 = 57{,}99^0,\ \sin\phi_1 = 0{,}84,\ \cos\phi_1 = 0{,}53$

$N_1 = -125 \cdot 0{,}84 - 93{,}75 \cdot 0{,}53 = -154{,}69KN$

$T_1 = 125 \cdot 0{,}53 - 93{,}75 \cdot 0{,}84 = -12{,}5KN$

Momentul în articulația 1 este egal cu zero.

Punctul 4:

$y_4 = \frac{4 \cdot 8}{20^2} \cdot 5(20 - 5) = 6$

$tg\phi_4 = \frac{4 \cdot 8}{l^2}(20 - 10) = 0{,}8$

$\phi_4 = 38{,}66$

$\sin\phi_4 = 0{,}62 \quad \cos\phi_4 = 0{,}78$

$N_4 = -75 \cdot 0{,}62 - 93{,}75 \cdot 0{,}78 = -119{,}6KN$

$T_4 = 75 \cdot 0{,}78 - 93{,}75 \cdot 0{,}62 = 0{,}375KN$

$M_4 = 500 - 93{,}75 \cdot 6 = -62{,}5KN$

Punctul 5:

$\sin\phi_5 = -0{,}62$

$\cos\phi_5 = 0{,}78$

$N_5 = -75 \cdot 0{,}62 - 93{,}75 \cdot 0{,}78 = -119{,}6KN$

$T_5 = -75 \cdot 0{,}78 + 93{,}75 \cdot 0{,}62 = -0{,}375KN$

$M_5 = -375 - 93{,}75 \cdot 6 = -187{,}5KNm$

Punctul 3:

$N_3 = -93{,}75KN$

$T_3{}^{st} = 25KN$

$T_3{}^{dr} = -75KN$

Punctul 2:

$\sin\phi_2 = -0{,}84$

$\cos\phi_2 = 0{,}53$

$N_2 = -75 \cdot 0{,}84 - 93{,}75 \cdot 0{,}53 = -11{,}69 KN$

$T_2 = -75 \cdot 0{,}53 + 93{,}75 \cdot 0{,}84 = -39 KN$

Diagramle de eforturi N,T,M sînt prezentate în fig.4.9

CAP. 5 STRUCTURI PLANE ALCATUITE DIN BARE ARTICULATE ÎN NODURI

5.1 Generalitati

În categoria structurilor articulate plane, numite obişnuit grinzi cu zăbrele, intră acele structuri care, prin schematizare, se reduc la un sistem de bare prinse între ele în noduri, a cărei invariabilitate geometrică este asigurată cînd în toate nodurile legătura dintre bare se consideră făcută prin articulaţii perfecte.

Se admite:

(1) realizarea de articulaţii perfecte în noduri, astfel că în extremităţile barelor nu pot apărea momente încovoietoare

(2) axarea perfectă a barelor în nodul teoretic, astfel că acţiunile date de bare asupra nodului formează un mănunchi de forţe concurente;

(3) aplicarea forţelor numai asupra nodurilor, sub formă de forţe concentrate, caz specific transmiterii indirecte a forţelor.

Ultima ipoteză este în general îndeplinită, deoarece grinzile cu zăbrele au obişnuit în construcţii rolul de elemente principale de susţinere. Pe acestea sprijină elemente aşezate transversal şi rezemate în noduri (pane la acoperişuri, antretoaze la poduri), astfel că sarcinile cu excepţia greutăţii proprii a barelor şi a acţiunii vîntului(la poduri) se transmit indirect.

Prima ipoteză se îndepărtează mult de realitate, deoarece în structurile reale prinderea barelor în nod este obişnuit rigidă. În trecut s-au construit poduri metalice la care s-au realizat articulaţii în noduri, dar experienţa a dovedit că asemenea articulaţii nu funcţionau ca atare atît datorită frecărilor cît şi ruginirii. S-a ajuns astfel la noduri rigide unde barele sînt prinse în nod prin intermediul unei piese speciale (guseu); prinderea se face prin nituire sau sudură, astfel că în nod unghiurile dintre bare devin invariabile. O situaţie asemănătoare se întîlneşte la construcţii în lemn, unde prinderea barelor se face obişnuit cu buloane sau cuie care rigidizează nodul. La construcţii de beton armat nodurile sînt monolitizate, astfel că barele rezultă încastrate una în alta.

Atît timp cît se consideră barele articulate în noduri şi transmiterea indirectă a sarcinilor, se obţin numai eforturi axiale. Axele barelor rămîn rectilinii în poziţia deformată a structurii, rezultă ca urmare a variaţiilor de lungime la bare, deoarece capetele acestora se pot roti în nodurile articulate. Rigiditatea nodurilor din structura reală conduce la o deformare mai complexă. Invariabilitatea unghiurilor dintre bare în nod face ca barele să sufere şi încovoiere. Rezultă că în barele structurii se dezvoltă concomitent atît eforturi axiale care sînt eforturile dominante cît şi momente încovoietoare care reprezintă eforturi secundare.

În rezolvarea practică se face împărţirea calculului în două etape: se consideră mai întîi structura avînd în noduri articulaţii perfecte şi se determină eforturile axiale din bare, apoi pe baza acestora se calculează variaţiile de lungime şi se determină configuraţia poziţiei deformate asupra căreia se introduce efectul rigidităţii nodurilor, din care se obţin eforturile secundare. Rezultă de aici că definirea dată structurilor articulate corespunde schematizării admise în prima etapă de calcul, pe baza căreia se pot determina eforturile dominante din bare.

În proiectare calculele se limitează obişnuit la această primă etapă pentru cele mai multe din construcţiile curente. Efectul eforturilor secundare rămîne în limite controlabile şi nu prea ridicate. Astfel la grinzi cu zăbrele metalice alcătuite din bare cu rigiditate redusă (lăţimea cel mult 1/10 din lungime) şi care sînt satisfăcător axate la noduri, efectul eforturilor secundare aduce corecţii ce rămîn de obicei inferioare unei cote de 10-15% din eforturile unitare. Astfel se pot considera în noduri articulaţii perfecte. Dacă se consideră materialul intrat în zona de comportare plastică, legătura rigidă în nod slăbeşte, astfel că modul cum lucrează efectiv structura se apropie de ipoteza simplificatoare a articulaţiilor.

Pentru structuri importante cum ar fi grinzi principale de poduri de deschideri mai mari, sau pentru grinzi cu zăbrele de beton armat care se execută în serie (elemente prefabricate), unde o

dimensionare cît mai riguroasă se impune, este necesar să se efectueze şi a doua etapă de calcul, introducînd efectul rigidităţii nodurilor.

Din definiţia grinzilor cu zabrele rezultă că o bară, situată între două noduri, este supusă la un sistem de forţe concurente numai la extremităţile ei. Sistemul de forţe se poate reduce la o rezultantă în fiecare capăt al barei, iar din condiţia de echilibru a barei rezultă că cele două rezultante trebuie sa fie coliniare, egale şi de sens contrar (fig.5.1a) Dacă bara este dreaptă (cazul uzual întîlnit în practică) forţa rezultantă R produce numai forţa axială în bară, care poate fi întindere sau compresiune, dupa sensul rezultantei(fig.5.1b). O bara din grinda cu zabrele introduce în calcule o singură necunoscută, forţa axiala N sau rezultanta R dirijată dupa linia care uneşte articulaţiile din capetele barei.

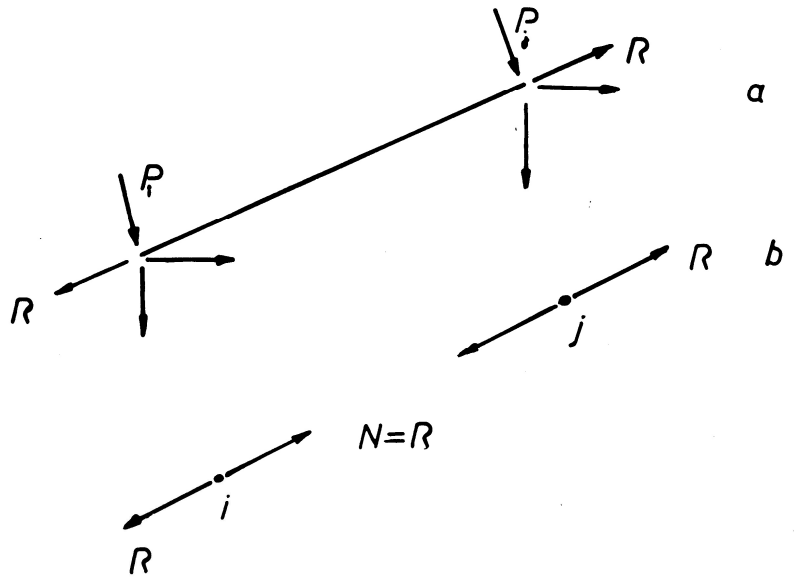


Fig.5.1 Reacţiuni în nodurile barelor grinzilor cu zăbrele

Realizarea practică a grinzilor cu zabrele nu satisface niciodată ipoteza admisă că barele sînt perfect articulate în noduri (fig.5.2). Astfel, la grinzile cu zăbrele metalice prinderea barelor în noduri se realizează prin intermediul unor gusee. Grinzile cu zăbrele din beton armat se execută cu noduri rigide iar la grinzile cu zăbrele din lemn, barele se prind în noduri prin buloane, eclise.

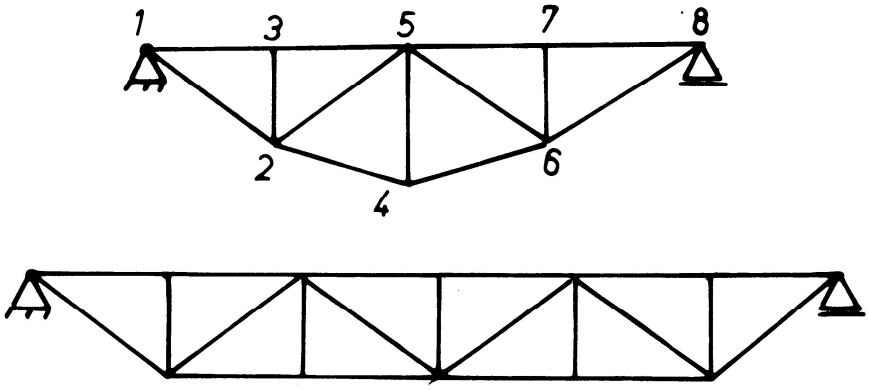


Fig.5.2 Exemple de grinzi cu zăbrele

Deci, în toate cazurile practice nodurile grinzilor cu zabrele se realizează ca noduri rigide, ceea ce conduce la apariția momentelor încovoietoare în bare. Încercările şi calculele efectuate pe grinzi cu zabrele au scos în evidență că dimensiunea mare a secțiunii transversale a barei este mai mică decît 1/10 din lungimea barei, efectul nodului rigid poate fi considerat ca un efect secundar, în comparație cu eforturile calculate în ipoteza ca nodurile sînt perfect articulate. La grinzile cu zabrele din beton armat trebuie să se țină seama şi de momentele încovoietoare care apar ca urmare a rigidității nodului.

Rezolvarea corectă a structurilor cu zăbrele necesită calculul forțelor axiale, care constituie eforturile dominante şi calculul momentelor încovoietoare care constituie o problema de analiză a unei structuri static nedeterminate.

Calculul forțelor axiale în ipoteza nodurilor perfect articulate se rezolvă pentru toate grinzile cu zăbrele. În afară de ipoteza simplificatoare că zăbrelele sînt articulate în noduri, la definirea grinzilor cu zăbrele, s-a mai considerat că toate axele barelor concură într-un singur punct, denumit nod teoretic, şi că forțele exterioare se aplică numai în aceste noduri. În practică, centrarea barelor în nodul teoretic se poate realiza în majoritatea cazurilor, uneori sînt însă necesare mici dezaxări (la grinzile cu zăbrele cu deschideri mari , la grinzile cu zăbrele din lemn), care conduc la apariția unor momente încovoietoare locale. Cînd forțele exterioare sînt aplicate şi între noduri, acestea se înlocuiesc cu rezultantele lor aplicate în noduri şi separat se ține seamă de efectul încovoierii barei intre noduri.

5.2 Condiții de determinare statică şi invariabilitate geometrică

Analiza alcătuirii constructive a grinzilor cu zăbrele în ipoteza nodurilor articulate necesită verificarea amănunțită a asigurării invariabilității geometrice a structurii. Pentru aceasta este necesar să se verifice dacă structura are invariabilitatea geometrică asigurată, independent de baza de rezemare de care se leagă, sau dacă structura are invariabilitatea geometrică şi fixarea în plan asigurate numai împreună cu legăturile față de baza de rezemare. Dacă lungimea barelor grinzii cu zăbrele se consideră fixă, adică se neglijează deformarea acestora sub acțiunea forțelor exterioare, atunci cea mai simplă construcție cu noduri articulate care are invariabilitatea geometrică asigurată este triunghiul. De două noduri ale triunghiului se mai poate fixa prin intermediul a două bare articulate încă un nod (fig.5.3) şi aşa mai departe. Pentru fiecare nod nou în afara primelor trei noduri, sînt necesare numai două bare. Dacă se notează cu n numărul total de noduri şi cu b numărul de bare al grinzii cu zăbrele, între acestea există relația:

$(5.1)\ldots b = 2n - 3$

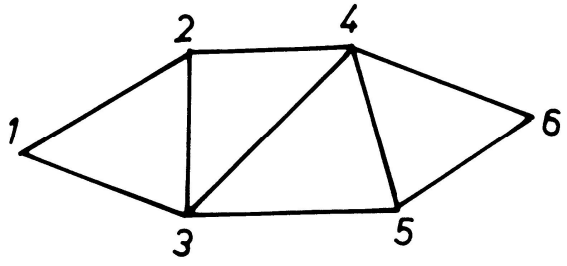


Fig.5.3 Dezvoltarea unei grinzi cu zăbrele față de un triunghi elementar

care stabileşte legătura între numărul nodurilor şi numărul barelor pentru o grindă cu zăbrele cu invariabilitatea geometrică asigurată. Dacă $b > 2n - 3$ structura are mai multe bare decît numărul minim necesar, iar dacă $b < 2n - 3$, structura are mai puține bare decît numărul minim necesar, iar dacă $b < 2n - 3$ structura are mai puține bare decît numărul minim pentru a forma o structură invariabilă geometric.

Pentru stabilirea numărului de legături interioare, trebuie analizată situația fiecărui nod al grinzii cu zăbrele. Astfel, dacă în nod concură numai două bare, acestea formează o singură

articulație interioară şi introduce două legături în calcule. Însă cînd în nod se întîlnesc mai multe bare , numărul articulațiilor din nod este egal cu numărul barelor care concură în nod din care se scade o bară. Un astfel de nod va fi echivalent cu a=(k-1) articulații simple şi va introduce în calcul un număr de legături interioare l_i=2a=2(k-1), în care k este numărul barelor care concură într-un nod al grinzii cu zăbrele, iar a-numărul articulațiilor simple dintre două bare.
Astfel relația se poate scrie sub forma:

$$2a = 3b - 3 \quad (5.2)$$

care reprezintă condiția de invariabilitate geometrică proprie a grinzii cu zăbrele şi este analoagă cu relația (5.1). Pentru fixarea grinzii de baza de rezemare mai este necesar un număr minim de r=3 legături exterioare. Înseamnă că numărul minim de legături interioare şi exterioare pentru a obține o structură cu zăbrele , care are invariabilitatea geometrică şi fixarea în plan asigurate se verifică cu relația:

$$2n = b + r \quad (5.3)$$

Analizînd relația (5.3) se constată că în partea dreaptă există numărul de necunoscute al problemei, adică eforturile din bare şi reacțiunile din reazeme, iar în partea stîngă numărul de ecuații de echilibru static disponibile pentru calculul acestor necunoscute. Dacă numărul de necunoscute este egal cu numărul de ecuații de echilibru static grinda cu zăbrele este static determinată, iar dacă numărul de necunoscute este mai mare ca numărul ecuațiilor posibile, grinda cu zăbrele este static nedeterminată. Gradul de nedeterminare statică este egal cu diferența între numărul de necunoscute şi numărul ecuațiilor de echilibru static.

Pentru exemplificare se aplică relațiile (5.1) şi (5.3) la structurile cu zăbrele din fig. (5.4).

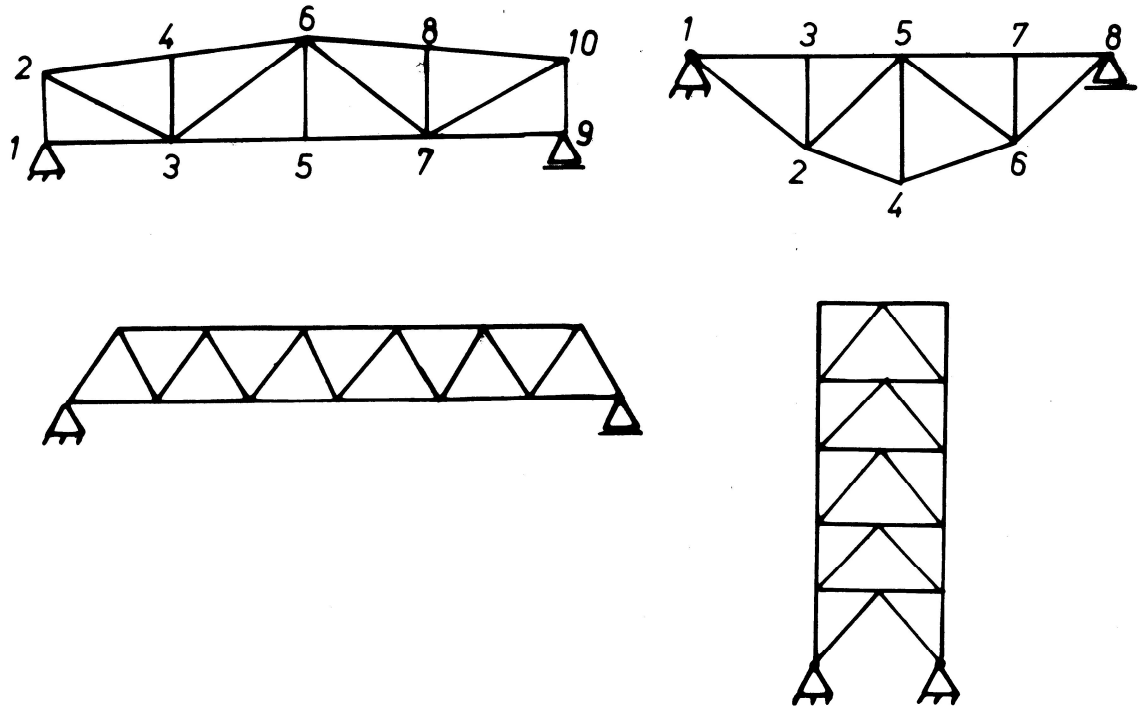


Fig.5.4 Exemple de grinzi cu zăbrele

Rezultă că grinda cu zăbrele din fig.5.4a cu n=10, b=17,r=3 are invariabilitatea geometrică proprie asigurată fără rezemări şi totodată posedă şi numărul minim de legături exterioare. Satisfacerea condițiilor (5.1) şi (5.3) este necesară, dar nu suficientă deoarece nu dă indicații referitoare la modul de dispunere al legăturilor interioare şi exterioare. Grinda cu zăbrele din fig.5.4b cu n=8, b=13,r=3 verifică condițiile (5.1) şi (5.3) însă prin dispunerea greşită a diagonalei 3-4 în panoul 2-3-5-4, rezultă un mecanism în panoul 4-5-7-6.

Prin urmare pentru obținerea unei grinzi cu zăbrele corect alcătuite nu este suficientă numai verificarea condițiilor (5.1) şi (5.3) ci trebuie ca barele să fie corect dispuse.

Astfel grinda cu zăbrele din fig. 5.4c are n=13, b=22, r=4, se observă că structura fără legăturile exterioare din rezemări nu are invariabilitatea geometrică proprie asigurată, panoul 8-11-12-13 rotindu-se în jurul articulației 8. Dacă se verifică relația (5.3) rezultă că împreună cu legăturile exterioare grinda cu zăbrele din fig. 5.4c este o structură cu invariabilitate geometrică şi fixarea în plan asigurate.

Grinda cu zăbrele din figura 5.4d are n=14, b=24,r=4 şi numai împreună cu legăturile exterioare constituie o structură cu invariabilitatea geometrică şi fixarea în plan asigurate. Grinda cu zăbrele din figura 5.4e este un mecanism cu un grad de libertate interior deoarece are n=23, b=42, r=3 şi din verificarea condițiilor (5.1) şi (5.3) rezultă b<2n-3 sau b+r<2n. Structura cu zăbrele din fig.5.4f are invariabilitatea geometrică şi fixarea în plan asigurate aşa cum se obține din condițiile (5.2) şi (1.2) care permit analiza structurii pentru a=19, b=33 şi r=3.

În continuare se vor prezenta căile de identificare a structurilor cu zăbrele care au formă critică. Alcătuirea corectă a unei grinzi cu zăbrele trebuie să urmărească formarea de triunghiuri juxtapuse şi uneori partial suprapuse . Considerînd secționate toate barele care concură în nodul i efectul acestora asupra nodului se reduce la forțele axiale N_{ij} din barele concurente în nod.
Ecuația de echilibru a nodului se scrie vectorial astfel:

$$(5.4)\ldots P_i + \sum_{j=1}^{k} N_{ij} = 0$$

care este echivalentă cu două ecuații de proiecții:

$$(5.4a)\ldots \sum X_i = 0; \ldots \sum Y_i = 0$$

5.3 Clasificarea structurilor plane cu zăbrele

Structurile cu zăbrele se întîlnesc în practică într-o varietate mare de forme. La o asemenea structură se deosebesc barele care mărginesc structura cu zăbrele numite tălpi care după poziția lor sînt talpa superioară S şi talpa inferioară I, barele care leagă tălpile între ele numite zăbrele ; cele înclinate se numesc diagonale D iar cele verticale se numesc montanți V.

După modul de alcătuire structurile cu zăbrele se împart în următoarele categorii:
-*structuri articulate simple* formate dintr-o succesiune de triunghiuri, două cîte două cu o latură comună, fără ca suprafața triunghiurilor să se suprapună(fig.5.5a..g) care pot avea forma conturului:
#cu tălpi paralele (fig.5.5a,b,c)
cu tălpi poligonale şi eventual curbe (obişnuit numai nodurile se află pe o curbă, barele între noduri se execută drepte) fig. 5.5d,e,f,h

După modul de distribuție al zăbrelelor , structurile articulate simple pot fi:
sistem triunghiular (fig.5.5a,b,d,e,f,h)
sistem dreptunghiular (fig.5.5g)
cu diagonale în K(fig.5.5c)

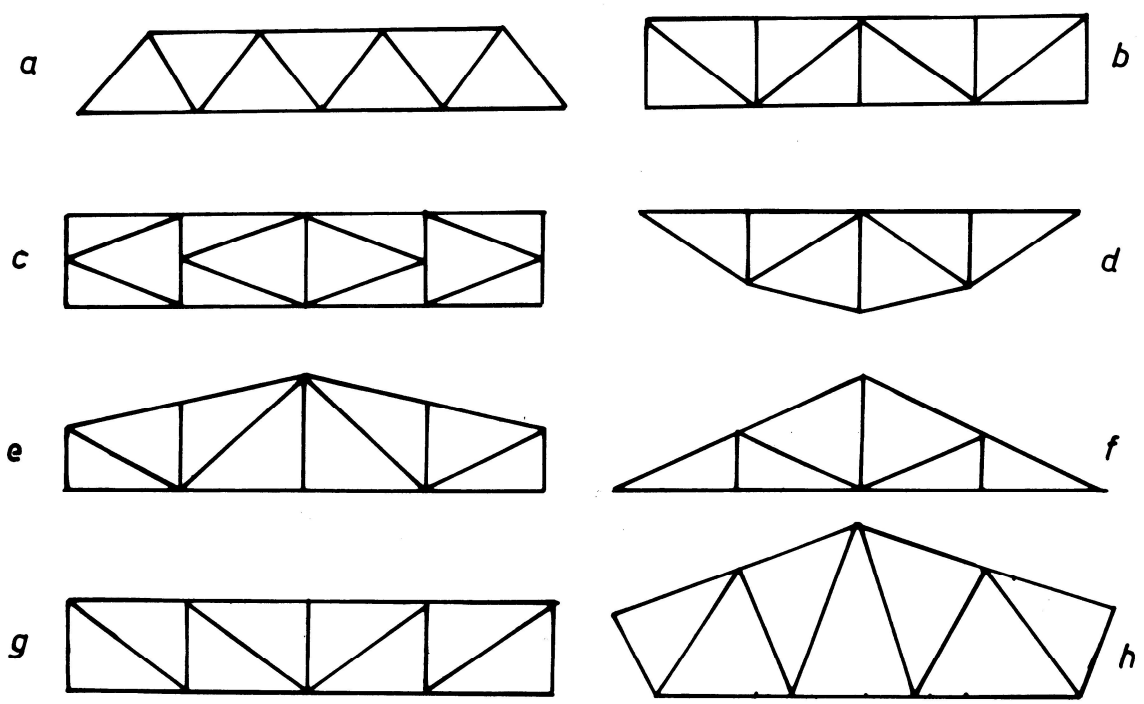


Fig.5.5 Tipuri de grinzi cu zăbrele

-*structuri articulate compuse* alcătuite din combinarea sau suprapunerea mai multor structuri articulate simple, în aşa fel încît să rezulte o structură cu invariabilitate geometrică asigurată. Astfel, grinda din fig.5.6a este alcătuită din două grinzi cu zăbrele sistem triunghiular legate între ele prin bara 4-10 şi articulaţia interioară 9. Grinda cu zăbrele din fig.5.6b, numită grindă cu bare suplimentare este alcătuită din introducerea peste o structură principală a unei substructuri secundare forma 0-1-3-2 în fiecare panou.

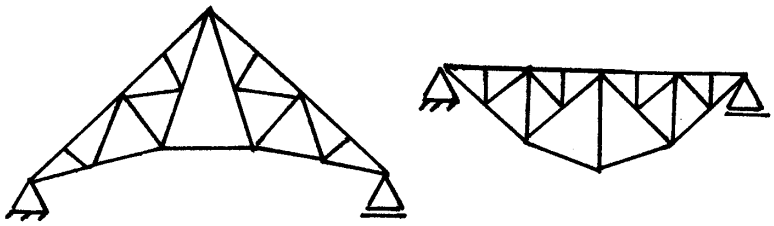


Fig.5.6 Structuri articulare compuse

-structuri articulate complexe, alcătuite din legarea invariabilă a nodurilor după alte reguli faţă de primele două categorii. Astfel structura din fig.5.7a nu este alcătuită dintr-o juxtapunere de triunghiuri şi nu poate fi descompusă în structuri articulate simple.

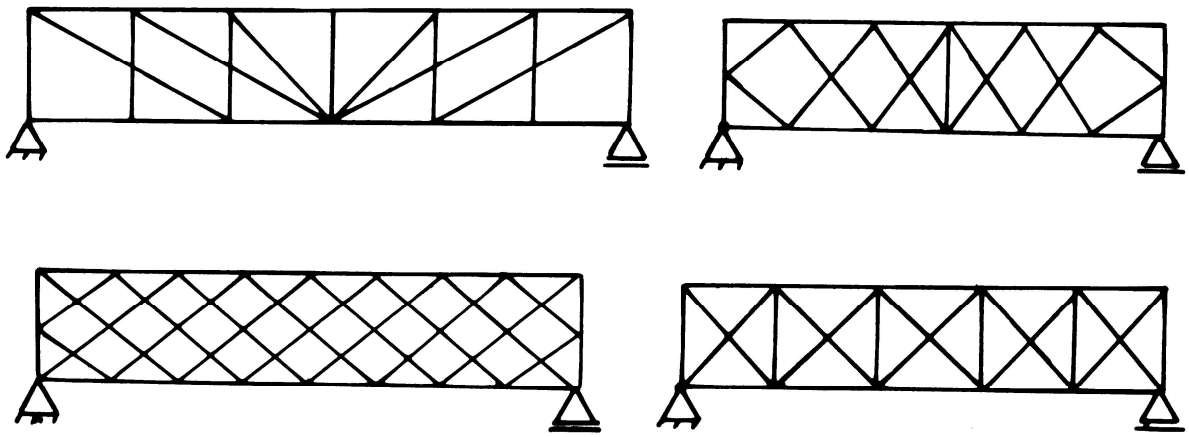


Fig.5.7 Structuri articulare complexe

5.4 Metoda izolării nodurilor

În această metodă se consideră izolat fiecare nod al grinzii cu zăbrele, prin secționarea tuturor barelor care concură în nod. În locul barelor secționate se introduc eforturile axiale, considerate de întindere. Asupra fiecărui nod acționează un sistem de forțe concurente format din forțele exterioare (acțiuni directe, reacțiuni) şi din forțele axiale necunoscute din barele secționate.

Condiția de echilibru a fiecărui nod permite scrierea a două ecuații de echilibru static, iar pentru o grindă cu zăbrele cu n noduri se pot scrie 2n ecuații din care se determină eforturile necunoscute şi reacțiunile. În practică, metoda izolării nodurilor nu se foloseşte sub această formă, deoarece conduce la un calcul laborios. Evitarea sistemului de 2n necunoscute se face calculînd mai întîi reacțiunile şi alegînd ordinea în care se scriu ecuațiile de echilibru pentru noduri, în aşa fel încît să se obțină numai două necunocute în fiecare nod. Rezolvarea grinzii cu zăbrele se începe din nodul în care concură numai două bare şi apoi folosind rezultatele obținute, se continuă calculul parcurgînd nodurile în aşa fel încît să rezulte de fiecare dată maximum două eforturi necunoscute.

Analizînd structurile articulate simple se constată că acestea satisfac condiția de existență a numai două eforturi necunoscute în fiecare nod. Rezultă că metoda izolării nodurilor este o metodă de calcul specifică structurilor articulate simple. Pentru calculul eforturilor în barele grinzii cu zăbrele , după calculul reacțiunilor, mai rămîn 2n-3 ecuații de echilibru pentru nodurile structurii. Deci, la penultimul nod se mai poate determina o singură necunoscută, pentru că o ecuație de la acest nod împreună cu ecuațiile de echilibru scrise pentru ultimul nod servesc drept ecuații de verificare.

Dezavantajul metodei constă în aceea că o greşeală efectuată pe parcurs se va repercuta asupra calculului ulterior şi nu va fi descoperită decît în final, la verificarea ultimului nod. Deoarece nu se ştie unde anume s-a greşit , calculul trebuie reluat de la primul nod. Pentru a evita asemenea situații pe parcurs se pot face verificări, prin metoda secțiunilor, aşa cum se va vedea mai departe.

În calculul practic, deoarece nu se cunoaşte de la început natura eforturilor din bare- întindere sau compresiune- se consideră inițial că toate eforturile necunoscute sînt eforturi de întindere. Dacă din calcul rezultă pentru unele eforturi semnul minus înseamnă că aceste eforturi sînt în realitate eforturi de compresiune.

Pentru anumite ipoteze de încărcare pot exista bare în care efortul să fie egal cu zero. Sînt unele situații particulare care permit să se depisteze aceste bare, din analiza condiției de echilibru al nodului şi anume:

-dacă într-un nod concură două bare de direcţii diferite şi în nod nu sînt aplicate forţe exterioare, eforturile în cele două bare sînt nule (condiţia de echilibru a nodului presupune ca forţele să fie coliniare, egale şi de sens contrar sau nule).

- dacă în nod concură trei bare, din care două sînt în prelungire, iar în nod nu sînt aplicate forţe exterioare, efortul în cea de-a treia bară este nul.
- cînd în nod concură trei bare, din care două sînt în prelungire şi în nod se aplică o forţă exterioară de direcţie oarecare, efortul în bara a treia se determină din ecuaţia de proiecţie după normala la barele în prelungire.

5.5 Metoda secţiunilor

Prin intermediul acestei metode se pot determina eforturile din una sau mai multe bare, fără să fie nevoie să se cunoască eforturile din alte bare.

În metoda secţiunilor, se secţionează structura şi se scriu ecuaţiile de echilibru static pentru una din cele două substructuri rezultate. Deoarece în plan se pot scrie trei ecuaţii de echilibru static, înseamnă că secţiunea realizată prin structură trebuie să taie maximum trei bare, pentru ca aceste eforturi să poată fi determinate. Înainte de a trece la calculul eforturilor din bare se determină reacţiunile, astfel încît în secţiunea efectuată să apară ca necunoscute numai eforturile din trei bare. Cele trei bare nu trebuie să fie concurente într-un punct sau paralele, deoarece în acest caz nu se asigură legarea invariabilă a celor două porţiuni. În acest caz numai două ecuaţii de echilibru static sînt independente. A treia ecuaţie este o combinaţie a celorlalte două. Izolarea unei substructuri se face prin secţionarea barelor care leagă cele două substructuri şi introducerea forţelor axiale din aceste bare, în nodurile de la extremităţile lor. Problema care trebuie rezolvată în metoda secţiunilor constă în determinarea rezultantei forţelor exterioare (acţiuni directe şi reacţiunile din reazeme) pe una din substructuri şi exprimarea echilibrului acestei rezultante în funcţie de eforturile din barele secţionate.

Scrierea ecuaţiilor de echilibru static, pentru porţiunea izolată din grinda cu zăbrele, trebuie făcută în aşa fel încît să conducă la ecuaţii cît mai simple. Pentru simplificarea calculelor este indicat ca fiecare ecuaţie să conţină numai o singură necunoscută, şi în acest scop se scriu următoarele ecuaţii de echilibru static:

-ecuaţii de momente în raport cu punctele de intersecţie a cîte două din cele trei bare secţionate;

-ecuaţii de momente pentru calculul eforturilor din tălpi şi ecuaţii de proiecţii după normala la tălpi pentru calculul eforturilor din diagonale, la grinzile cu zăbrele cu tălpi paralele.

Exemplul 1: Pentru grinda cu zăbrele din figura 5.8 să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele (în secţiunea I-I) folosind metoda secţiunilor.

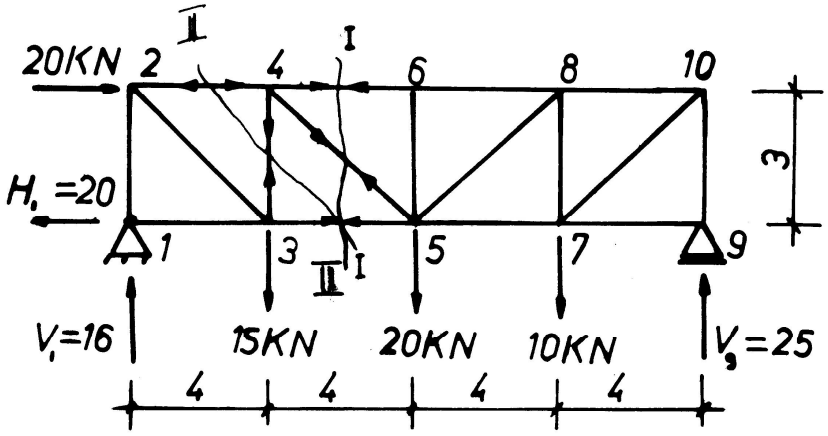


Fig.5.8 Metoda secțiunilor

$$\sum X_i = 0 \rightarrow H_1 = 20KN$$

$$\left(\sum M\right)_9 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 16 + 20 \cdot 3 - 15 \cdot 12 - 20 \cdot 8 - 10 \cdot 4 = 0 \rightarrow V_1 = 20KN$$

$$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow 20 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 20 \cdot 12 + 10 \cdot 12 - V_9 \cdot 16 = 0 \rightarrow V_9 = 25KN$$

$$\left(\sum M\right)_5 = 0 \rightarrow N_{46} \cdot 3 + 20 \cdot 8 - 15 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 0 \rightarrow N_{46} = -55,33$$

$$\left(\sum M\right)_4 = 0 \rightarrow -N_{35} \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 0 \rightarrow N_{35} = 46,66KN$$

$$\sum Y_i = 0 \rightarrow 20 - 15 - N_{45} \sin\alpha = 0 \rightarrow N_{45} = \frac{5}{\sin\alpha} = \frac{5}{0,6} = 8,33KN$$

$$\left(\sum M\right)_4 = 0 \rightarrow -N_{35} \cdot 3 + 20 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 0 \rightarrow N_{35} = 46,6KN$$

$$\left(\sum M\right)_3 = 0 \rightarrow 20 \cdot 4 + 20 \cdot 3 - N_{24} \cdot 3 = 0 \rightarrow N_{24} = 46,66KN$$

$$\sum Y_i = 0 \rightarrow 20 - 15 + N_{34} = 0 \rightarrow N_{34} = -5KN$$

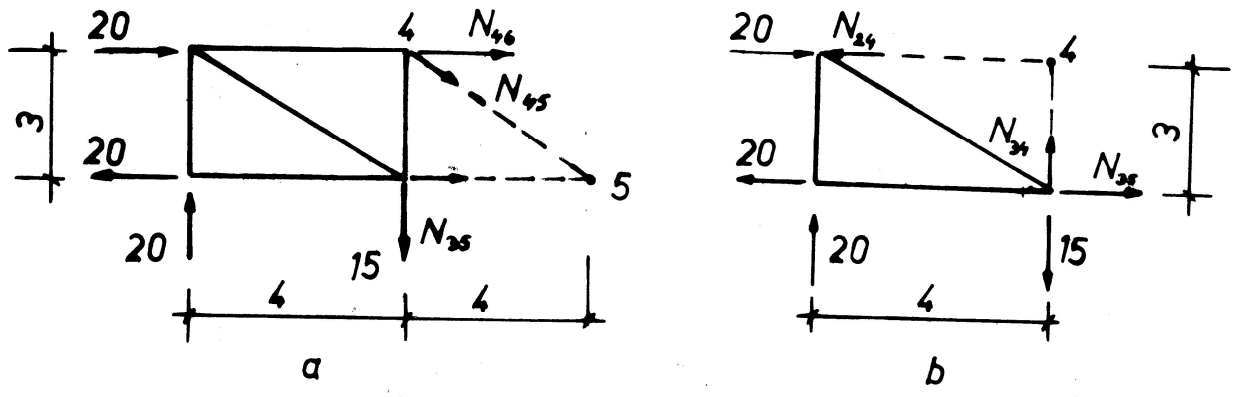


Fig.5.9 Sectiuena I-I (a) şi secținea II-II (b)

Exemplul 2:

Pentru grinda cu zăbrele din fig.5.10 să se determine eforturile din toate barele prin metoda izolării nodurilor.

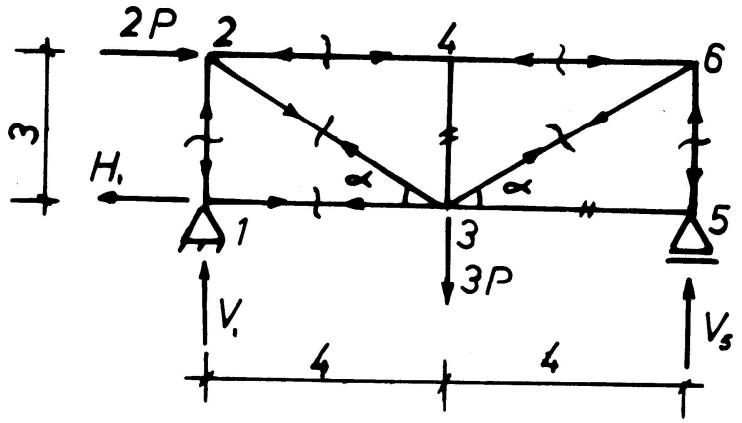


Fig.5.10 Metoda izolării nodurilor

$$\sum M_5 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 8 + 2P \cdot 3 - 3 \cdot P \cdot 4 = 0 \rightarrow V_1 = 0{,}75P$$
$$\sum X_i = 0 \rightarrow H_1 = 2 \cdot P$$
$$\sum M_1 = 0 \rightarrow 2P \cdot 3 + 3P \cdot 4 - V_5 \cdot 8 = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6\,;\ \cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Nod 1:

$$\sum X_i = 0 \rightarrow -2P + N_{13} = 0 \rightarrow N_{13} = 2P$$
$$\sum Y_i = 0 \rightarrow 0{,}75P - N_{12} = 0 \rightarrow N_{12} = 0{,}75P$$

Nod 2:

$$\sum Y_i = 0 \rightarrow 0{,}75P - N_{23} \cdot 0{,}6 = 0 \rightarrow N_{23} = 1{,}25P$$
$$\sum X_i = 0 \rightarrow 2P - N_{24} + 1{,}25P \cdot 0{,}8 = 0 \rightarrow N_{24} = 3P$$

Nod 3:

$$\sum Y_i = 0 \rightarrow -3P + 1{,}25P\sin\alpha + N_{36} \cdot 0{,}6 = 0 \rightarrow N_{36} = 3{,}75$$
$$\sum X_i = 0 \rightarrow -2P - 1{,}25P \cdot 0{,}8 + 3{,}75P \cdot 0{,}8 + N_{35} = 0 \rightarrow N_{35} = 0$$

Nod 6:

$$\sum Y_i = 0 \rightarrow N_{56} - 3{,}75P \cdot 0{,}6 = 0 \rightarrow N_{56} = 2{,}25P$$

Exemplul 3: Grinda cu zăbrele cu tălpi paralele

Pentru aplicarea metodei secțiunilor la grinda cu zăbrele cu tălpi paralele (fig.5.11) se efectuează secțiunea I-I prin grindă, se suprimă barele 3-5, 3-4 şi 2-4 care se înlocuiesc cu eforturile de întindere S_{35}, I_{24}, D_{34}.Pentru calculul efortului din bara 3-5 se foloseşte ecuația de momente în raport cu nodul 4.

$$S_{35}h + V_0 2\lambda - 2P\lambda = S_{35}h + M_4{}^0; S_{35} = -\frac{M_4{}^o}{h}$$

$$-I_{24}h + V_0\lambda = -I_{24}h + M_3{}^0 = 0; I_{24} = \frac{M_3{}^0}{h}$$

$$\sum Y = -D_{34}\sin\gamma + V_0 - 2P = -D_{34}\sin\gamma + T_{2-4}{}^0 = 0; D_{34} = \frac{T_{2-4}{}^0}{\sin\gamma}$$

$$\sum Y = V_{45} + V_0 - 3P = V_{45} + T_{II} = 0; V_{45} = -T_{II}$$

$$V_{45} + T_{35}{}^0; V_{45} = -T_{35}{}^0$$

$$V_{45} + T_{46}{}^0 = 0; V_{45} = -T_{46}{}^0$$

Efortul din talpa inferioară 2-4 se obține din ecuația de momente în raport cu nodul 3. Pentru a calcula efortul din diagonală se scrie o ecuație de proiecții după normala la tălpi, luînd în considerare forțele de pe substructura din stînga secțiunii I-I.

Se observă că eforturile în diagonalele grinzii cu zăbrele se calculează din forța tăietoare T^0 a grinzii orizontale corespunzătoare. Eforturile în diagonalele descendente sînt de întindere, iar în diagonalele ascendente sînt de compresiune. Variația eforturilor în succesiunea de diagonale este dată de variația forței tăietoare din grinda orizontală înlocuitoare. Efortul din diagonala $D_{3\text{-}4}$ se calculează uşor şi pe cale grafică, dacă prin extremitatea lui $T_{24}{}^0$se duce o paralelă cu diagonala pînă intersectează linia de referință.

Calculul efortului din montantul 4-5 necesită o secțiune prin grinda cu zăbrele de forma II-II şi scrierea ecuației de proiecții după normala la axele tălpilor pentru forțele din stînga secțiunii. În calculele prezentate mai sus s-a notat cu $T_{II}=V_0-3P$ proiecția pe verticală a tuturor forțelor situate în partea stîngă a secțiunii II-II care este asemănătoare unei forțe tăietoare. Pentru a exprima efortul din montant în funcție de forța tăietoare de la grinda orizontală corespunzătoare este necesar să se precizeze pe care talpă sînt aplicate forțele. Eforturile în montanții din reazeme şi montantul central se determină din izolarea nodurilor 0,7 şi 12, rezultînd că eforturile sînt de compresiune şi egale cu forțele aplicate în aceste noduri.

La calculul eforturilor în structurile cu zăbrele care au diagonale în K se foloseşte metoda secțiunilor combinată cu metoda izolării nodurilor.

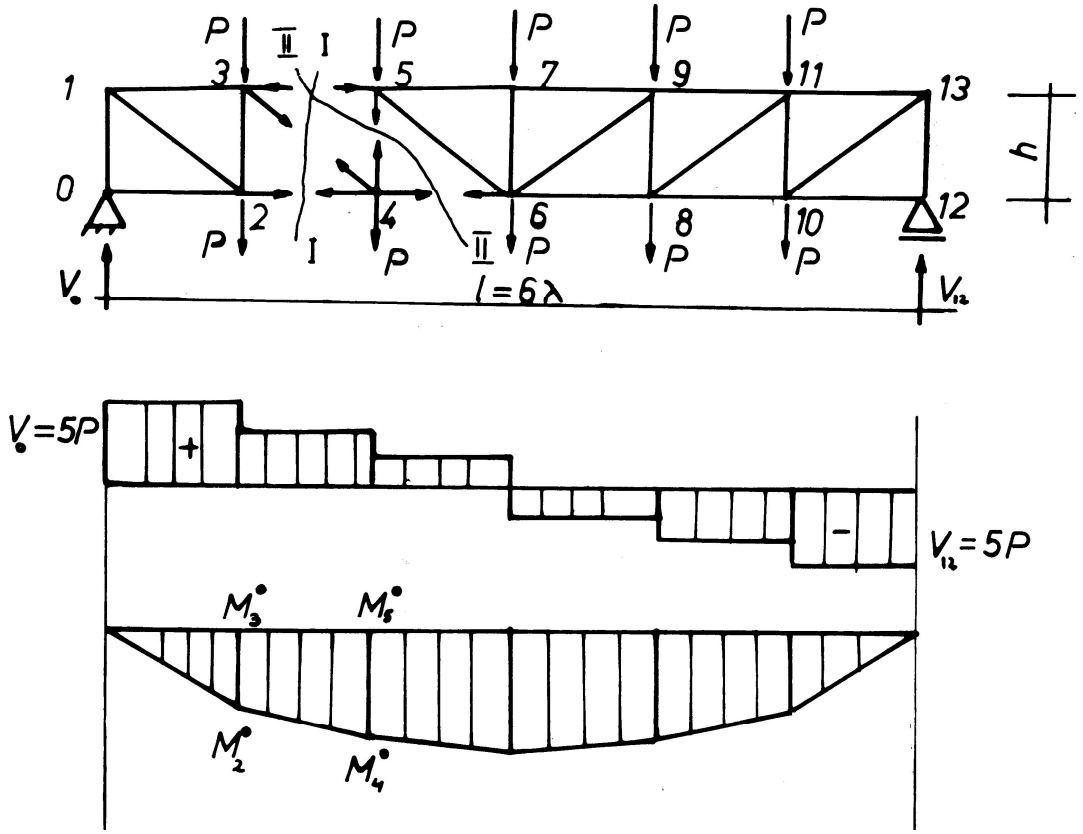
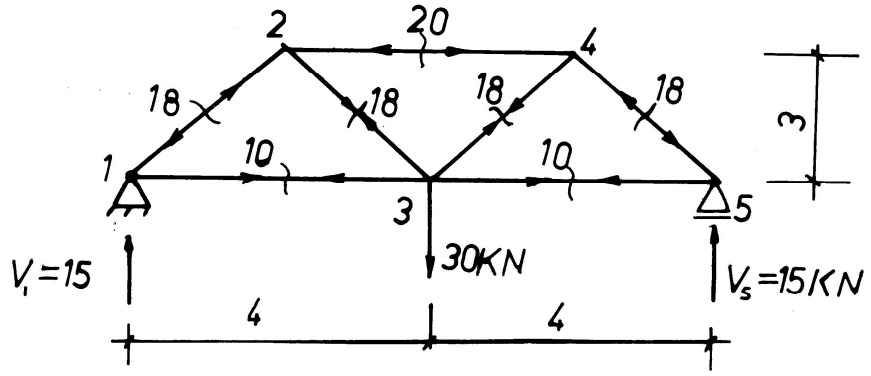


Fig.5.11 Grinda cu zăbrele cu tălpi paralele

Exemplul 4: Să se determine eforturile din barele grinzii cu zăbrele din figura 5.12 folosind metoda izolării nodurilor.



$\sin\alpha = 0{,}833\,;\ \cos\alpha = 0{,}555$

Nod 1:

$\sum Y_i = 0 \rightarrow 15 - N_{12} \cdot 0{,}833 = 0 \rightarrow N_{12} = 18$

$\sum X_i = 0 \rightarrow N_{13} - 18 \cdot 0{,}555 = 0 \rightarrow N_{13} = 10$

Nod 2:

$\sum Y_i = 0 \rightarrow 18 \cdot 0{,}833 + N_{23} \cdot \sin\alpha = 0 \rightarrow N_{23} = -18\text{KN}$

$\sum X_i = 0 \rightarrow -N_{24} + 18 \cdot \cos\alpha + 18 \cdot \cos\alpha = 0 \rightarrow N_{24} = 20\text{KN}$

CAP.6 UTILIZAREA PRINCIPIULUI LUCRULUI MECANIC VIRTUAL

Exprimarea stării de echilibru pentru un sistem oarecare, supus acțiunii unui ansamblu de forțe, se poate face folosind principiul deplasărilor virtuale cunoscut din Mecanică. Pe această bază se dezvoltă întregul studiu al echilibrului, obținîndu-se metode de lucru care conduc la soluții simple, sugestive şi elegante.

Pentru precizarea noțiunii de "deplasare virtuală", aşa cum aceasta intervine în calculul structurilor, considerăm un sistem oarecare avînd unul sau mai multe grade de libertate. Un asemenea sistem avînd mai puține legături decît cel minim necesare asigurării indeformabilității geometrice şi fixării în plan, înseamnă că din alcătuirea sa rezultă posibilități de deplasare cinematică, fiind de fapt un mecanism. Legăturile existente îi pot permite să ia anumite poziții deplasate, în timp ce îl împiedică de a lua altele. Primul caz se referă la deplasări compatibile cu legăturile, în timp ce deplasările care s-ar putea imagina, dar care nu sînt permise de legăturile existente, reprezintă deplasări incompatibile.

Fiecare grad de libertate existent în alcătuirea sistemului permite o deplasare distinctă compatibilă cu legăturile. Pentru sisteme avînd un singur grad de libertate, imaginea deplasărilor corespunzătoare este arătată în fig.6.1. Deplasarea poate fi dată într-un sens sau celălalt, ambele alternative constituind de fapt o singură deplasare distinctă permisă de legături. Pentru sisteme avînd mai multe grade de libertate, se pot obține variate posibilități de deplasări compatibile cu legăturile, dar numărul deplasărilor distincte este egal cu cel al gradelor de libertate, orice altă deplasare putînd fi obținută din acestea prin combinare.

Pentru exemplificare fie sistemul din fig.6.1 care are două grade de libertate (d=3x2+2x2-3x4=-2)

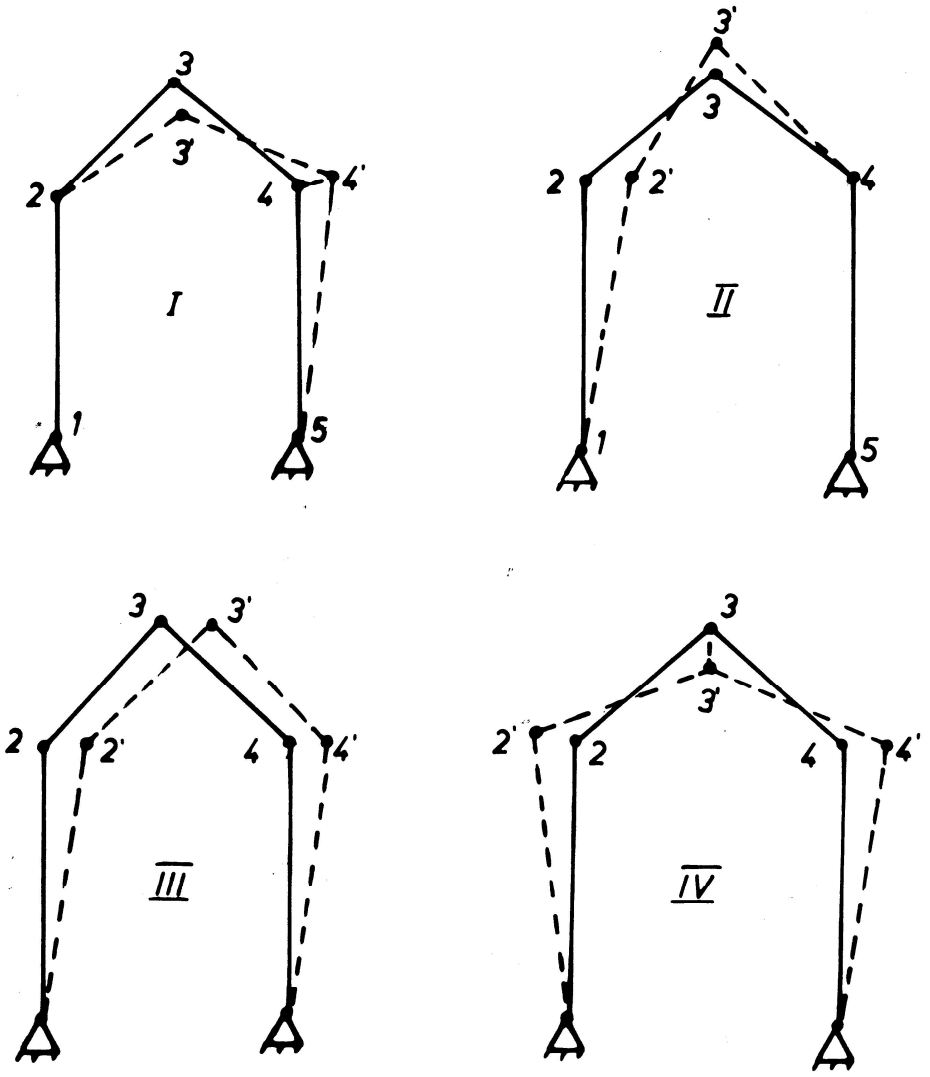


Fig.6.1 Sisteme avînd un singur grad de libertate

Menținînd fixe barele 1-2 respectiv 4-5, rezultă posibilitățile de deplasare I şi II compatibile cu legăturile. Alte deplasări posibile sînt de exemplu III şi IV, dar se constată uşor că deplasarea III rezultă din suprapunerea deplasărilor I şi II în timp ce deplasarea IV se obține suprapunînd deplasarea II, dată în sens invers, cu deplasarea I. Situații asemănătoare se întîlnesc la orice alte sisteme avînd grade de libertate. Posibilitățile de deplasări distincte compatibile cu legăturile constituie astfel o caracteristică de alcătuire a unui sistem, în funcție de numărul gradelor de libertate care rezultă din distribuirea legăturilor.

Fie acum un sistem oarecare-avînd grade de libertate, supus unui ansamblu de forțe, distribuit astfel încît sub acțiunea acestuia sistemul se găseşte în echilibru. Datorită stării de echilibru acțiunea forțelor aplicate nu dă sistemului nici o deplasare cinematică reală. Se poate totuşi imagina că independent de acțiunea forțelor exterioare s-ar da sistemului o deplasare foarte mică, compatibilă cu legăturile, care să-l ducă într-o poziție infinit vecină. O asemenea deplasare poartă numele de deplasare virtuală şi trebuie înțeleasă ca o deplasare posibilă infinit mică, permisă de legăturile existente în sistem, dar independentă de modul de acțiune al forțelor aplicate, care se găseşte în echilibru.

Înseamnă că posibilitățile de deplasări compatibile cu legăturile, care rezultă din modul de alcătuire a sistemelor cu grade de libertate, reprezintă deplasări virtuale ce pot fi date acestor sisteme. O deplasare virtuală trebuie văzută ca deplasarea infinit mică de la începutul unei mişcări,

astfel că direcția deplasării unui punct al sistemului coincide cu direcția vitezei din acel punct. Studiul deplasărilor virtuale se va face deci după legile cinematicii pentru mişcări infinit mici.

Pentru o deplasare virtuală dată unui sistem, aflat în echilibru sub acțiunea unui ansamblu de forțe, corespunde o cantitate de lucru mecanic elementar datorită parcurgerii de către forțe a deplasărilor corespunzătoare. Acest lucru mecanic se numeşte lucru mecanic virtual şi poate fi evaluat pe baza relației :

$$dL = 0 \rightarrow \sum M_i \psi_i + \sum P_i \eta_i = 0$$

Condiția de mai sus serveşte la exprimarea ecuațiilor de echilibru ale unui sistem oarecare. Pentru fiecare deplasare virtuală dată se poate scrie o asemenea ecuație. Numărul de ecuații diferite de echilibru ce se pot obține pentru un sistem este egal cu numărul deplasărilor virtuale distincte care pot fi date acestuia, deci cu numărul gradelor de libertate ale sistemului.

Ecuațiile de echilibru, scrise pe baza folosirii principiului deplasărilor virtuale, stabilesc corelații directe între diferitele forțe active care acționează asupra sistemului. Prin aceasta caracterul lor diferă de cel al ecuațiilor de echilibru examinate anterior (ecuații de proiecții şi de momente) conducînd la obținerea unui instrument de operare mai adecvat interpretărilor de ansamblu ale fenomenelor studiate.

Deplasările virtuale au un caracter cinematic deoarece sînt date unor sisteme avînd grade de libertate. Porțiunile componente ale sistemului sînt considerate corpuri rigide, iar în ecuația $dL = 0$ intră numai forțe exterioare active. În acest mod, utilizarea ecuației serveşte la exprimarea condiției de echilibru static.

Domeniul de aplicare al principiului deplasărilor virtuale cuprinde şi posibilitatea exprimării condiției de echilibru static. Pentru aceasta se dau deplasări virtuale unor sisteme care nu conțin grade de libertate (sînt static determinate sau static nedeterminate). Condiția de compatibilitate cu legăturile conduce la deplasări virtuale cu caracter elastic, reprezentate de anumite poziții deformate. Aici trebuie considerată starea de echilibru dintre forțele exterioare şi forțele interioare, acestea figurînd împreună în ecuația de echilibru.

La un sistem cu grade de libertate, echilibrul nu este posibil pentru sarcini oarecare, ci numai pentru anumite situații particulare de încărcare. De fapt, structurile care se studiază în Statica construcțiilor nu au grade de libertate, dar ele pot fi reduse la sisteme de acest fel prin suprimarea unor anumite legături, punînd în evidență forțele de legătură respective. Aceste forțe de legătură intră deci în categoria forțelor active, iar mărimile lor trebuie să fie astfel încît să asigure echilibrul sistemului. Exprimarea condiției de echilibru prin deplasări virtuale conduce la ecuații în care nu intervin celelalte forțe de legătură, corespunzătoare legăturilor menținute. Se stabilesc astfel relații de condiție numai între sarcini şi forțele de legătură puse în evidență, care sînt singurele necunoscute. Este uşor de văzut suplețea procedeului, care introduce în ecuații numai necunoscutele dorite.

Cînd structura dată este static determinată, numărul necunoscutelor puse în evidență este egal cu numărul gradelor de libertate care rezultă prin suprimarea legăturilor respective. Deoarece pentru fiecare grad de libertate se poate scrie prin deplasări virtuale o ecuație de echilibru, înseamnă că se obțin ecuațiile necesare pentru aflarea necunoscutelor. Cînd structura este static nedeterminată, obținerea unui sistem cu un anumit număr de grade de libertate impune suprimarea unui număr mai mare de legături, surplusul fiind egal cu numărul legăturilor suplimentare. În acest caz, ecuațiile de echilibru scrise prin deplasări virtuale conduc numai la stabilirea unor relații de condiție între necunoscutele puse în evidență, necesare pentru asigurarea echilibrului.

Se consideră un mecanism, adică o structură cu mai puține legături decît numărul minim necesar pentru a obține o structură invariabilă geometric şi corect fixată în plan, caracterizată prin posibilități de deplasare cinematică. Legăturile existente în această structură permit ca să ocupe anumite poziții deplasate, deplasări numite deplasări compatibile cu legăturile.

Dacă asupra unei structuri mecanism acționează un sistem de forțe în echilibru, nu se produc deplasări cinematice. Se poate imagina că structurii i se imprimă o deplasare foarte mică, care aduce structura într-o poziție infinit vecină. *O astfel de deplasare infinit mică, compatibilă cu legăturile*

structurii şi independentă de forţele în echilibru aplicate pe structură, poartă numele de "deplasare virtuală".

Starea de echilibru a unei structuri supusă unui sistem de forţe oarecare se poate exprima şi folosind principiul deplasărilor virtuale: " *condiţia necesară şi suficientă ca o structură să fie în echilibru este ca suma lucrurilor mecanice virtuale produse de toate forţele aplicate pe structură, să fie nulă pentru orice deplasare virtuală, compatibilă cu legăturile*.

Lucrul mecanic al unei forţe este produsul dintre forţa (P) şi proiecţia deplasării punctului său de aplicaţie pe direcţia forţei (dη), iar lucrul mecanic al unui moment este produsul dintre un moment (M) şi rotatia corpului (dψ), pe care actionează momentul. Deplasările sînt infinit mici, şi se utilizează simbolurile η şi ψ.

Astfel este necesară trasarea diagramelor de deplasare virtuală pe orizontală şi pe verticală.

În calculul practic se pleacă de la o deplasare generalizată considerată unitară. În funcţie de această deplasare se calculeză rotaţiile tuturor corpurilor şi deplasările punctelor de aplicaţie ale forţelor şi ale rezultantelor încărcărilor uniform distribuite.

6.1 Centre absolute de rotaţie. Centre relative de rotaţie

Centrul instantaneu de rotaţie îl reprezintă punctul în jurul căruia se produce rotaţia corpului. Centrul instantaneu de rotaţie al unui corp se află pe normala la direcţia vitezei punctelor corpului. Pentru sistemele de corpuri, determinarea poziţiei centrelor instantanee, se realizează cu ajutorul teoremei de coliniaritate , teoremă care se enunţă astfel: "la sistemele cinematice plane, trei centre instantanee de rotaţie, a trei corpuri oarecare, sînt coliniare.

Baza de susţinere se consideră ca un corp. Pentru exemplificare se consideră sistemul cinematic, cu un grad de libertate din fig.6.2.

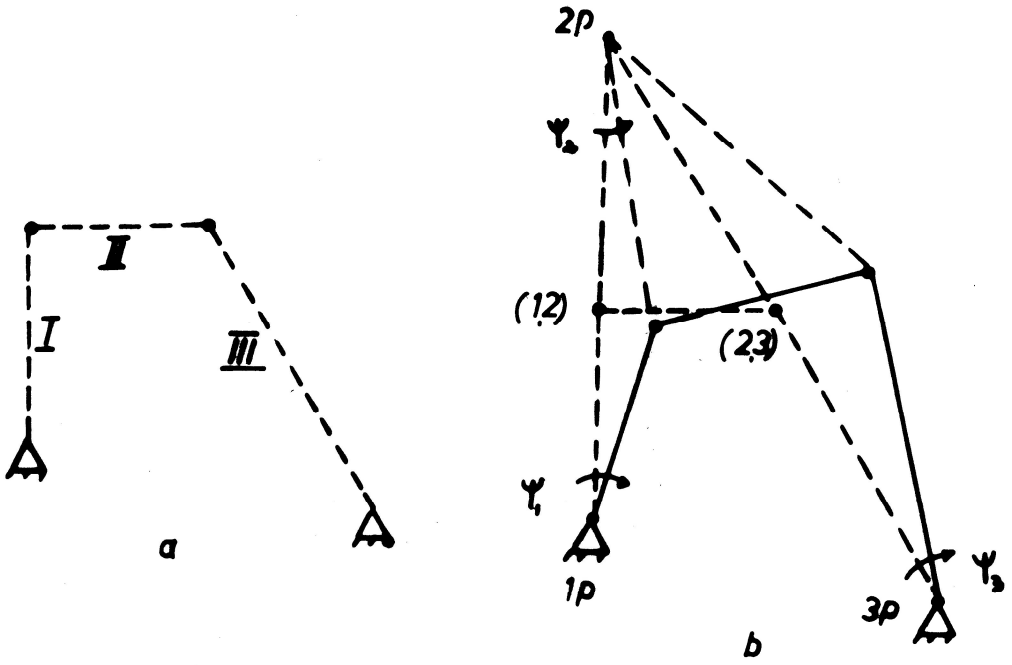


Fig.6.2 Sistem cinematic cu un grad de libertate

Numărul de grade de libertate cinematică se obţine cu relaţia:
N=3C-A-2S, N=3x1-4-0= -1
Deoarece N<0 rezultă că sistemul este un mecanism cu un grad de libertate.

Se porneşte de la o rotire ψ_1 a corpului I în jurul centrului 1p. Articulaţia 12 este punct comun al I şi II, are o singură deplasare şi o singură viteză. Centrul de rotire al corpului II, şi anume

2p, se află pe normala la viteza v_1 deci în prelungirea direcției 1p-12. Corpul III se roteşte în jurul centrului 3p, iar articulația 23, comună corpurilor II şi III, are o singură deplasare şi o singură viteză. Centrul de rotire al corpului II, 2p se află pe normala la viteza v_3 deci în prelungirea direcției 3p-23. Rezultă că trei centre instantanee de rotație sînt coliniare.
Astfel putem definii:
-centre absolute- caracterizate prin aceea că viteza lor absolută este egală cu zero;
-centre relative – caracterizate prin aceea că viteza relativă este egală cu zero.

Teorema de coliniaritate a centrelor instantanee de rotație se poate enunța în următoarele moduri:
-centrele absolute a două corpuri şi centrul relativ corespunzător sînt coliniare;
-centrele relative a trei corpuri sînt coliniare.
Schematizarea teoremei de coliniaritate se poate face în modul următor:
1p-12-2p sau 12-13-23
Poziția unui centru absolut sau a unui centru relativ se poate obține prin intersecția a două direcții. În cazul mecanismului din figura 6.2 centrul absolut al corpului II se află la intersecția direcțiilor:

$$2p\ldots\{\frac{2p\ldots12\ldots1p}{2p\ldots32\ldots3p}$$

iar centrul relativ 13 se află la intersecția direcțiilor:

$$13\ldots\{\frac{13\ldots1p\ldots3p}{13\ldots12\ldots32}$$

În cazul în care un corp este legat articulat de baza de rezemare atunci în acea articulație se află centrul absolut al corpului respectiv. Centrele absolute ale corpurilor care nu se încadrează în această situație se determină prin intermediul teoremei de coliniaritate.

Pentru a evalua lucrul mecanic virtual produs de un sistem de forțe, este necesar să se cunoască deplasările punctelor de aplicație ale forțelor şi rotirile corpurilor. Aceste elemente se pot obține din aşa numitele diagrame de deplasări, diagrame care se reprezintă în raport cu două axe normale: orizontală şi verticală. Elementul esențial în această operație îl constituie cunoaşterea legii de variație a deplasărilor punctelor corpurilor.
Concluzii:

-diagramele de deplasări virtuale se anulează în punctele în care centrele absolute se proiectează pe axele de referință;

-centrele relative a două corpuri reprezintă practic punctul cu deplasare comună;

-variațiile liniare ce delimitează deplasările unui corp în cele două diagrame (orizontală şi verticală) sînt la nivelul lor normale.Prin această modalitate se poate face verificarea corectitudinii diagramelor de deplasări virtuale.

-orice deplasare,rotație sau translație, se determină prin relații liniare funcție de deplasarea unitară de la care s-a plecat.

6.2 Determinarea reacțiunilor şi eforturilor pentru structuri static determinate

Pentru determinarea unui efort sau a unei reacțiuni prin folosirea principiului lucrului mecanic virtual este necesar ca structura static determinată să se transforme într-un mecanism prin eliminarea legăturii corespunzătoare efortului căutat. În locul legăturii eliminate se va introduce echivalentul mecanic.

Mecanismului astfel obținut, aflat de altfel în echilibru sub acțiunea forțelor date şi a necunoscutei respective, i se dă o deplasare virtuală unitară şi din condiția de lucru mecanic virtual egal cu zero dL=0, se determină efortul sau reacțiunea căutată:

$$(6.3)\ldots S\delta_s + \sum P_i\eta_i + \sum M_j\psi_j = 0$$

unde S reprezintă mărimea statică necunoscută, iar δ_s deplasarea pe direcția sa de acțiune-translație η_s sau rotire ψ_s.

Pentru ca un efort să apară în ecuația de echilibru (6.3) trebuie pus în evidență. Aceasta se realizează suprimînd legătura corespunzătoare aşa cum se arată în fig. 6.3

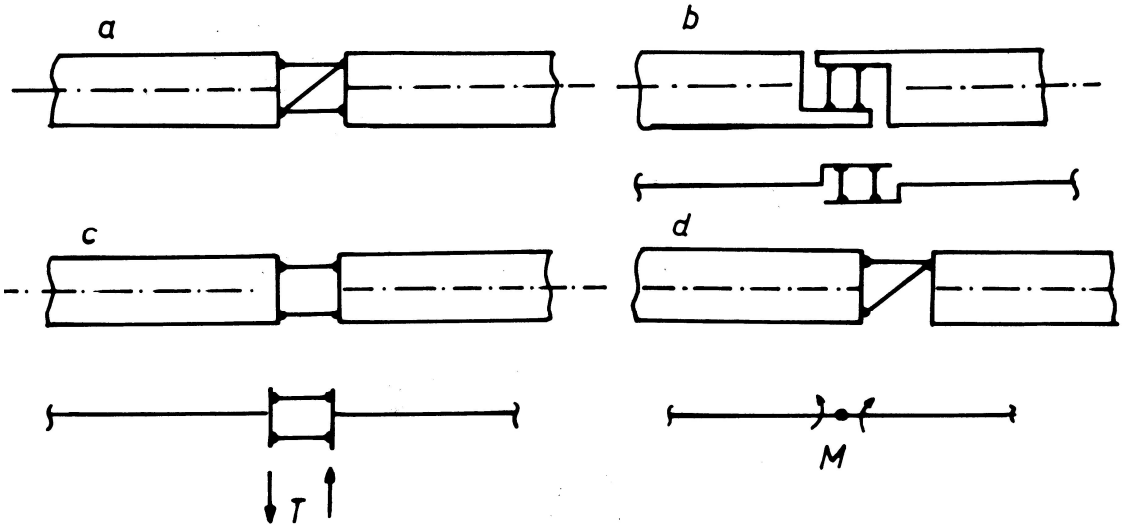


Fig.6.3 Eliminarea legăturilor corespunzătoare eforturilor N,T,M

Exemplul 1. Pentru grinda Gerber din fig. 6.4 să se calculeze V_2,M_2, $T_{2-\varepsilon}$, utilizînd principiul lucrului mecanic virtual.

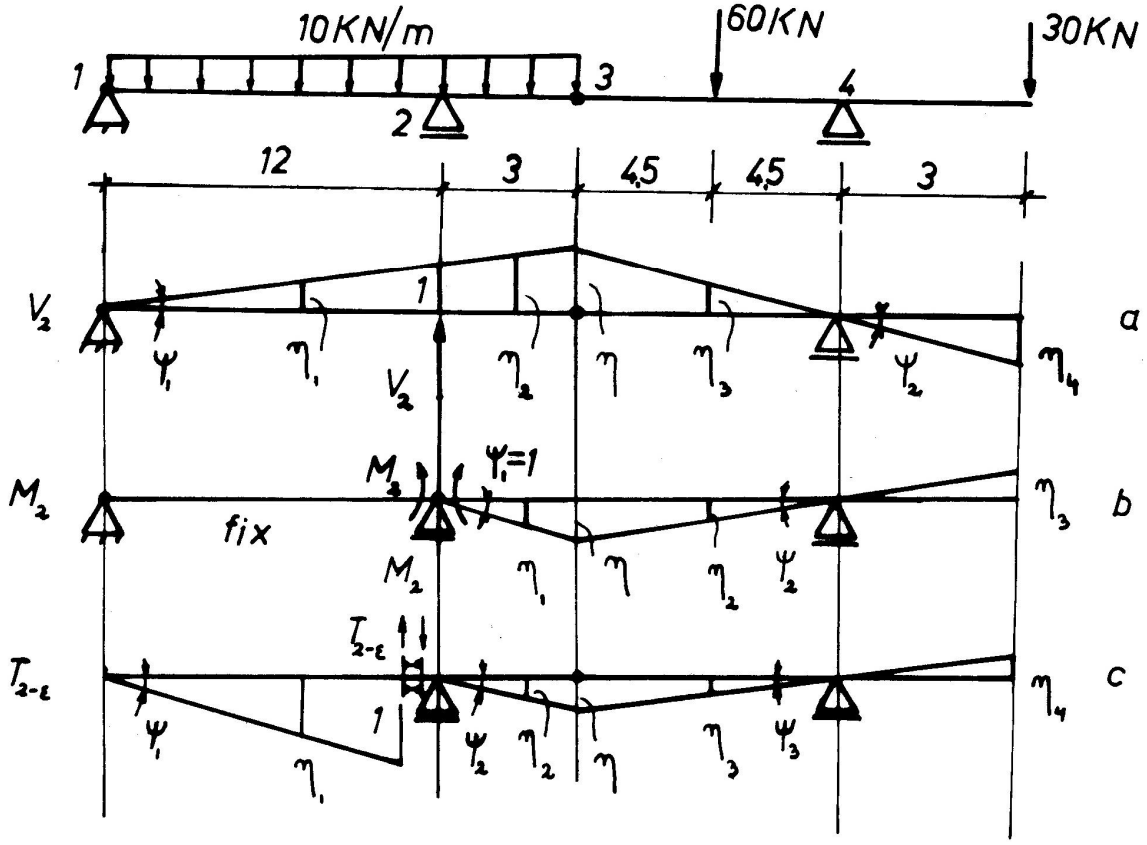


Fig.6.4 Calcul eforturi prin deplasări virtuale pentru o grindă Gerber

Calculul reacţiunii V_2 În cazul de faţă mecanismul se obţine eliminînd legătura corespunzătoare reacţiunii V_2. Pe direcţia reacţiunii V_2 se consideră o deplasare unitară, mecanismul fiind format din două corpuri. Centrul absolut al corpului I este în punctul 1 iar al corpului II în punctul 4.

Pe baza deplasării unitare de la care s-a plecat se poate calcula rotaţia corpului I: $\psi_1 = \frac{1}{12}$;

Deplasarea comună η dintre corpul I şi corpul II se calculează pentru a se putea obţine rotaţia ψ_2: $\eta = \psi_1 \cdot 15 = \frac{15}{12}$;

$$\psi_2 = \frac{\eta}{9} = \frac{15}{12 \cdot 9};\ \eta_1 = \psi_1 \cdot 6 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\eta_2 = \psi_1 \cdot 13{,}5 = \frac{13{,}5}{12}$$

$$\eta_3 = \psi_2 \cdot 4{,}5 = \frac{67{,}5}{108}$$

$$\eta_4 = \psi_2 \cdot 3 = \frac{45}{108}$$

Condiţia de lucru mecanic virtual este egal cu zero are forma: $\sum P_i \cdot \eta_i + \sum M_j \cdot \psi_j = 0$

$$-10 \cdot 12 \cdot \eta_1 - 10 \cdot 3 \cdot \eta_2 - 60 \cdot \eta_3 + 30 \cdot \eta_4 + V_2 \cdot 1 = 0 \rightarrow V_2 = 118{,}75\text{KN}$$

Calculul momentului încovoietor M_2. Se obţine mecanismul cu un grad de libertate eliminînd legătura corespunzătoare momentului încovoietor M_2, aşa cum s-a reprezentat în fig.6.5b. Grinda 1-2 este fixă, deci mecanismul se formează pe porţiunea de la secţiunea 2 spre dreapta şi este compus din două corpuri. Centrele de rotaţie cunoscute sînt centrul absolut 1p şi centrul relativ 12 . Centrul absolut al corpului II se află în reazemul 4.

Se dă o deplasare virtuală corpului I, ψ_1 iar deplasările celorlalte corpuri rezultă din condiţia ca într-un centru relativ deplasările a două corpuri sînt egale, iar într-un centru absolut deplasarea este egală cu zero.

$$\psi_1 = 1;\ \eta = \psi_1 \cdot 3 = 3;\ \psi_2 = \frac{\eta}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\eta_2 = \psi_2 \cdot 4{,}5 = \frac{4{,}5}{3};\ \eta_3 = \psi_3 \cdot 3 = 1;\ \eta_1 = \psi_1 \cdot 1{,}5$$

$$M_2 \cdot \psi_1 + 10 \cdot 3 \cdot \eta_1 + 60 \cdot \eta_2 - 30 \cdot \eta_3 = 0 \rightarrow M_2 = -105\text{KNm}$$

Semnul minus obţinut pentru momentul încovoietor indică faptul că în realitate sensul acestui moment este invers decît cel considerat iniţial, respectiv fibra întinsă va fi fibra superioară.

Calculul forţei tăietoare $T_{2\text{-}\varepsilon}$. Mecanismul corespunzător calculului forţei tăietoare $T_{2\text{-}\varepsilon}$ este reprezentat în fig. 6.6c şi este format din trei corpuri.

Caracteristica acestui mecanism este aceea că pentru orice deplasare dată, corpurile I şi II legate prin două legături paralele, vor fi paralele- respectiv centrul relativ 12 se află la infinit pe orizontală. Dînd o deplasare virtuală, de exemplu η=1 pe direcţia forţei tăietoare rezultă diagrama de deplasări din fig. 6.6c în care corpurile I şi II sînt paralele.

$$\psi_1 = \psi_2 = \frac{1}{12};\ \eta = \psi_2 \cdot 3 = \frac{1}{4}$$

$$\psi_3 = \frac{\eta}{9} = \frac{1}{36};\ \eta_1 = \psi_1 \cdot 6 = \frac{1}{2}$$

$$\eta_2 = \psi_2 \cdot 1{,}5 = \frac{1{,}5}{12};\ \eta_3 = \psi_3 \cdot 4{,}5 = \frac{4{,}5}{36}$$

$$\eta_4 = \psi_3 \cdot 3 = \frac{1}{12}$$

$$10 \cdot 12 \cdot \eta_1 - T_{2-\varepsilon} \cdot 1 + 10 \cdot 3 \cdot \eta_2 + 60 \cdot \eta_3 - 30 \cdot \eta_4 = 0 \rightarrow T_{2-\varepsilon} = 68{,}75\text{KN}$$

Exemplul 2: Să se determine momentul în secțiunea "i" şi forța tăietoare $T_{5-\varepsilon}$ pentru grinda Gerber din figura 6.5.

a) Calculul momentului încovoietor în secțiunea "i"

Se consideră inițial rotația corpului "1" $\psi_1 = 1$. Ulterior se pot calcula rotațiile corpurilor II şi III şi deplasările punctelor de aplicație ale forțelor.

$$\eta_1 = \psi_1 \cdot 2 = 2;\ \psi_2 = \frac{\eta_1}{2} = 1$$

$$\eta_2 = \psi_2 \cdot 3 = 3$$

$$\psi_3 = \frac{\eta_2}{4} = \frac{3}{4};\ \eta_3 = \psi_2 \cdot 1{,}5 = 1{,}5$$

$$\eta_4 = \psi_3 \cdot 2 = 1{,}5$$

$$-M_i \cdot \psi_1 - M_i \cdot \psi_2 - 20 \cdot 3 \cdot \eta_3 - 20 \cdot 4 \cdot \eta_4 = 0$$

$$-M_i \cdot 1 - M_i 1 - 60 \cdot 1{,}5 - 80 \cdot 1{,}5 = 0 \rightarrow M_i = -105$$

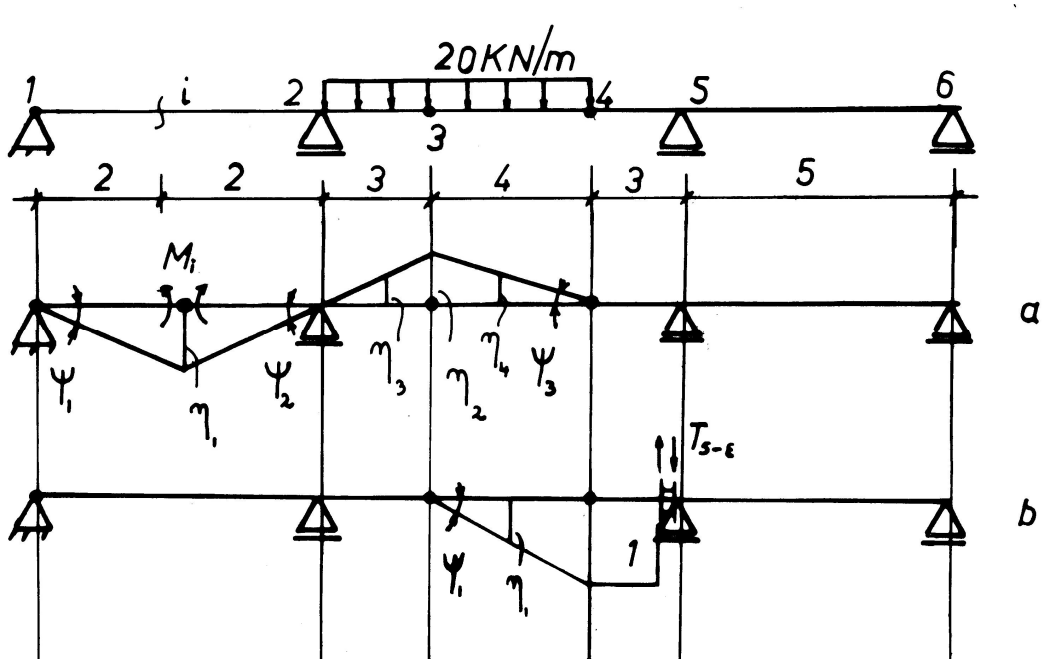


Figura 6.5 Aplicarea principiului lucrului mecanic virtual la grinzi Gerber

b) Calculul forței tăietoare $T_{5-\varepsilon}$

Se consideră deplasarea pe direcția forței tăietoare $\eta = 1$. Deoarece corpul de la dreapta reazemului II este fix , atunci cel din stînga se translatează.

$$\psi_1 = \frac{1}{4};\ \eta_1 = \frac{1}{2}$$

$$-T_{5-\varepsilon} \cdot 1 + 20 \cdot 4 \cdot \eta_1 = 0 \rightarrow T_{5-\varepsilon} = 40\text{KN}$$

Exemplul 3 :

Să se calculeze reacțiunea H_2 la cadrul din figura 6.6 utilizînd principiul lucrului mecanic virtual.

Mecanismul cu un grad de libertate a fost obținut eliminînd legătura orizontală din reazemul 2 şi pentru menținerea echilibrului ansamblului s-a introdus reacțiunea H_2. Mecanismul este format din două corpuri. Centrele de rotație cunoscute sînt 1p şi 12. Centrul absolut al corpului II se determină astfel:

$$2p\begin{cases}\dfrac{2p\ldots12\ldots1p}{2p\perp reazem\ldots2}\end{cases}$$

Dînd deplasarea η=1, pe direcția reacțiunii H_2 se obțin diagramele de deplasări pe orizontală şi pe verticală.

Condiția de lucru mecanic virtual este:

$$40\cdot\eta_1+30\cdot5\cdot\eta_2-H_2\cdot\eta=0$$

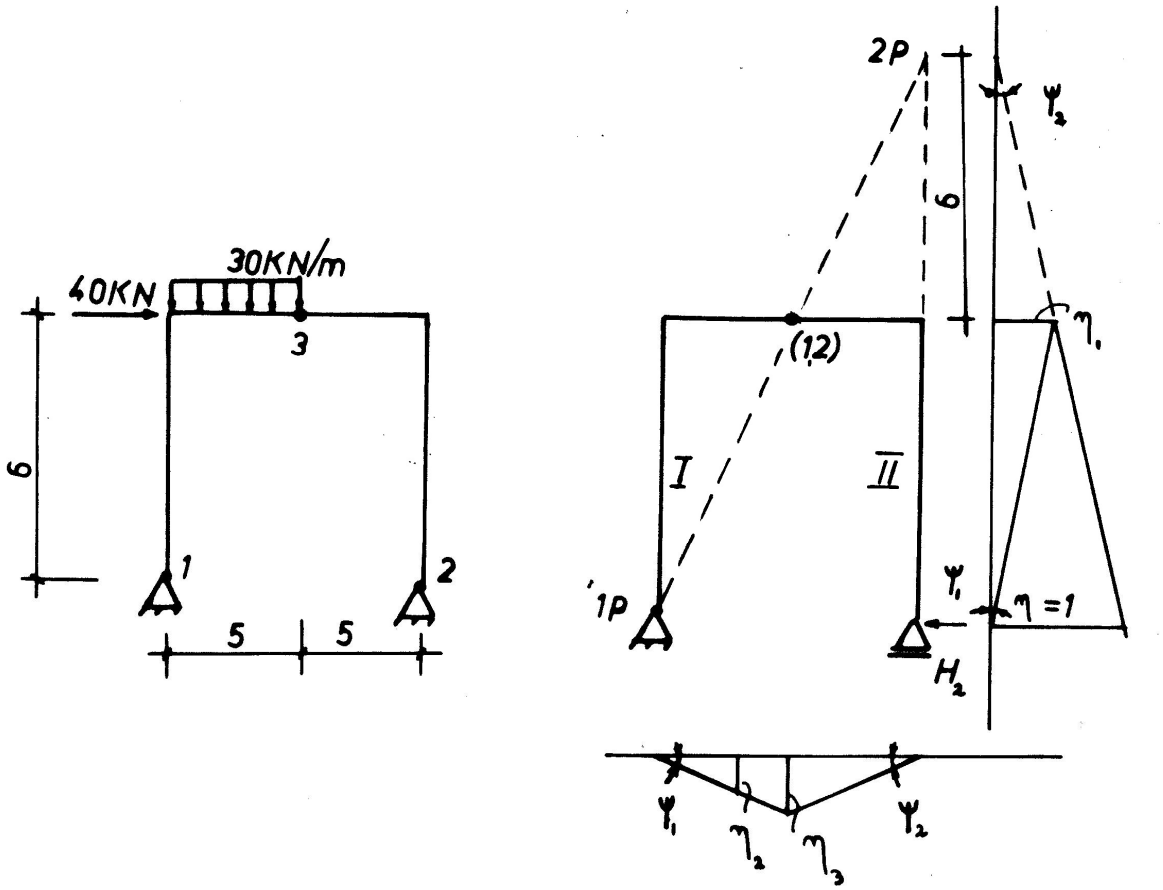


Fig.6.6 Determinarea reacțiunii H_2 utilizînd principiul lucrului mecanic virtual

Deplasările fiind ininit mici unghiurile se asimilează cu tangenta.

Avînd η=1 se obțin celelalte deplasări:

$$\eta_1=\frac{1}{2},\psi_2=\frac{1}{12},\psi_1=\psi_2=\frac{1}{12},\eta_2=2{,}5\psi_1=\frac{2{,}5}{12}$$

Reacțiunea H_2 are valoarea:

$$H_2=40\cdot\frac{1}{2}+150\cdot\frac{2{,}5}{12},H_2=51{,}25KN$$

Semnul este plus, deci H_2 are sensul ales inițial.

Exemplul 4:

Să se calculeze momentul încovoietor din secțiunea i la cadrul din fig. 6.7, utilizînd principiul lucrului mecanic virtual.

Eliminînd legătura corespunzătoare momentului încovoietor din secțiunea "i" se obține mecanismul din figura 6.7.

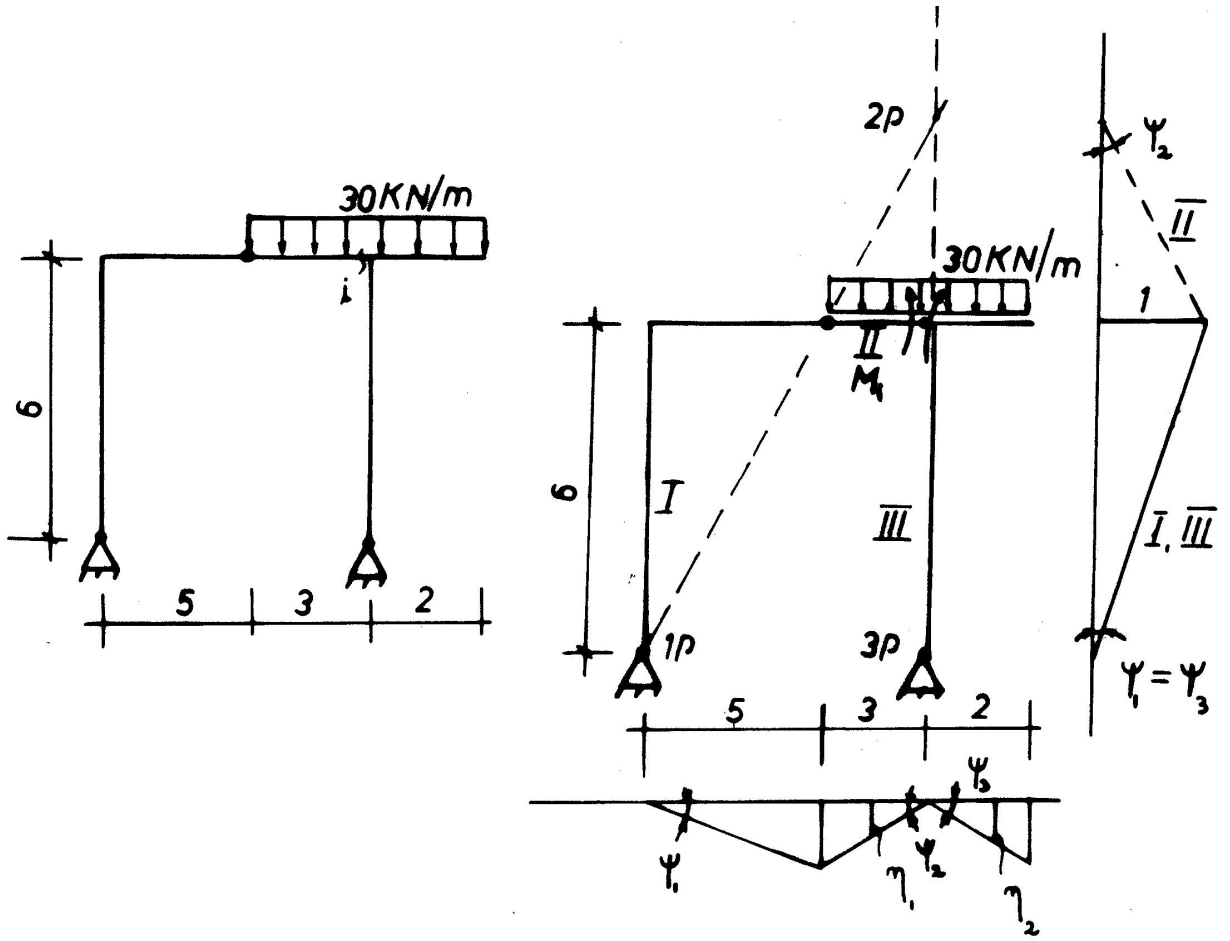


Fig.6.7 Utilizarea principiului lucrului mecanic virtual pentru determinarea momentului M_i

Mecanismul format este din trei corpuri. Centrul absolut al corpului II se obține folosind teorema de coliniaritate după cum urmează:

$$2p\begin{Bmatrix}1p+(1,2)\\3p+(2,3)\end{Bmatrix}$$

$$\psi_1=\psi_3=\frac{1}{6};\ \eta_1=\psi_2\cdot 1{,}5=\frac{1{,}5}{3{,}6}$$

$$\psi_2=\frac{1}{3{,}6};\ \eta_2=\psi_3\cdot 1=\frac{1}{6};$$

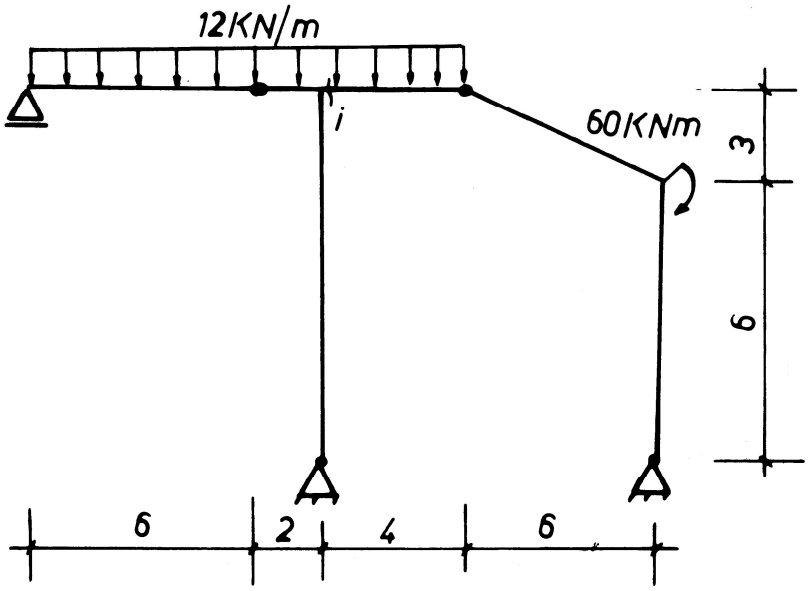
Ecuația de lucru mecanic virtual capătă forma:

$$M_i\cdot\psi_2+M_i\cdot\psi_3+30\cdot 3\cdot\eta_1+30\cdot 2\cdot\eta_2=0\rightarrow M_i=106{,}8\text{KNm}$$

Exemplul 5: Să se determine momentul din secțiunea “i” pentru cadrul din figura 6.8 , folosind principiul lucrului mecanic virtual.

Pentru determinarea momentului în secțiunea “i” în acea secțiune se întrerupe continuitatea, introducîndu-se o articulație. Mecanismul obținut este format din patru corpuri.

Centrul absolut al corpului II se află în articulație la legătura cu baza de rezemare,la fel şi în cazul corpului patru.



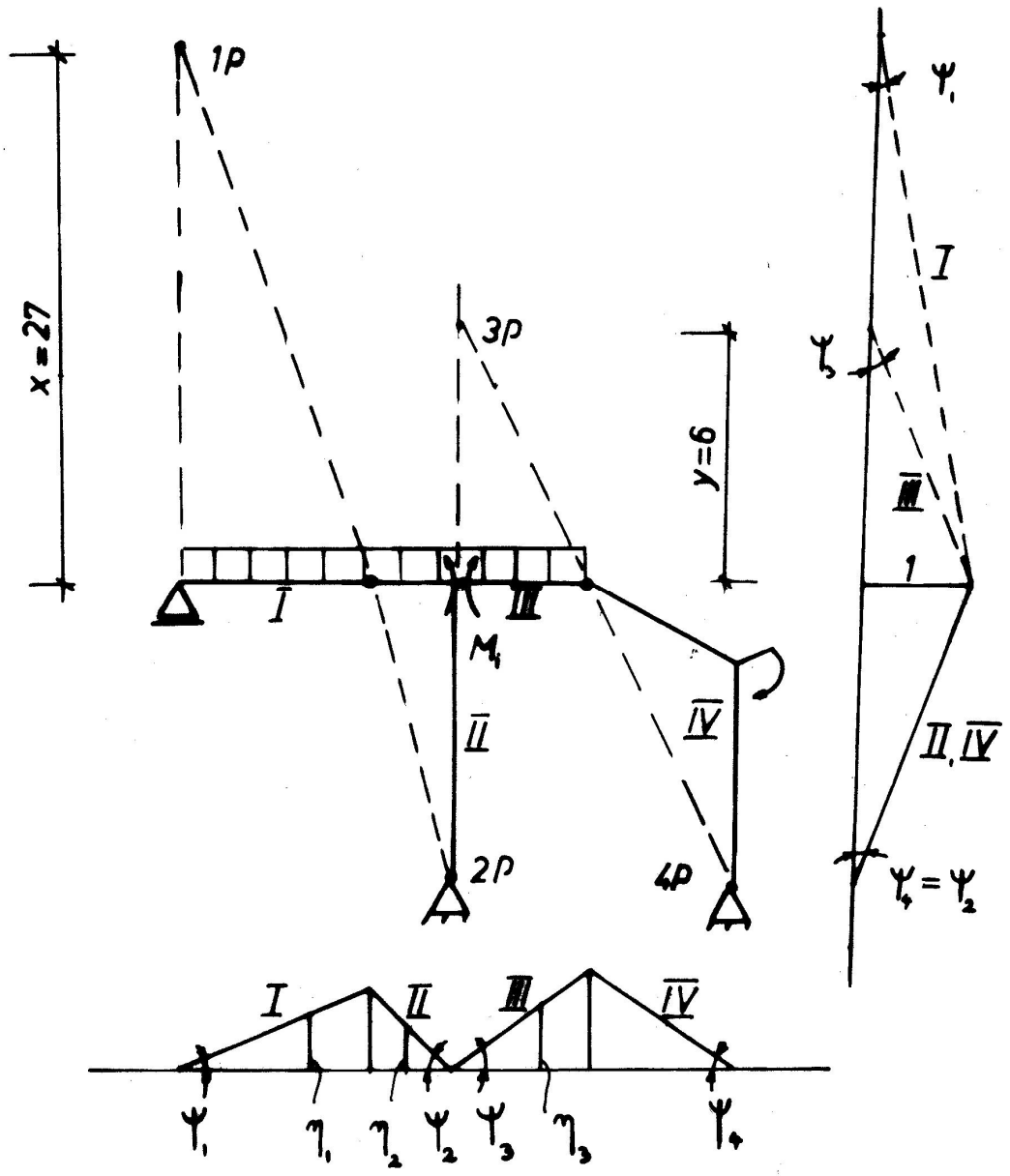


Fig.6.8 Exemplu aplicare principiul lucrului mecanic virtual la cadre

Pentru determinarea centrelor absolute ale corpurilor 1 şi 3 se aplică teorema de coliniaritate după cum urmează:

$$1p\begin{cases}\perp \text{ reazem}\\ 2p+(1,2)\end{cases}$$

$$3p\begin{cases}2p+(2,3)\\ 4p+(3,4)\end{cases}$$

Poziția centrelor absolute 1p şi 3p se obține prin asemănări de triunghiuri. Astfel conform figurii x=27, y=6.

$$\psi_2=\psi_4=\frac{1}{9}$$

$$\psi_1=\frac{1}{27};\psi_3=\frac{1}{6}$$

$$\eta_1 = \psi_1 \cdot 3 = \frac{3}{27} = \frac{1}{9};\ \eta_2 = \psi_2 \cdot 1 = \frac{1}{9}$$

$$\eta_3 = \psi_3 \cdot 2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$-M_i\psi_2 - M_i\psi_3 + 60 \cdot \psi_4 - 12 \cdot 6 \cdot \eta_1 - 12 \cdot 2 \cdot \eta_2 - 12 \cdot 4 \cdot \eta_3 = 0$$

$$M_i\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{6}\right) = 60 \cdot \frac{1}{9} - 72 \cdot \frac{1}{9} - 24\frac{1}{9} - 48\frac{1}{3} = 0$$

$$0{,}27M_i = -20 \rightarrow M_i = -74\text{KNm}$$

Exemplul 6:
Se cere calculul momentul încovoietor M_i şi a reacțiunii H_2 la cadrul din figura 6.9:

- Pentru calculul momentului încovoietor M_i se întrerupe continuitatea cadrului în secțiune "i", prin introducerea unei articulații. Structura astfel formată este un mecanism format din 3 corpuri conform figurii 6.9b.
Se consideră inițial o deplasare unitară pe direcția centrului relativ (1,2), pe baza căreia se vor calcula ulterior rotațiile tuturor corpurilor.

$$\psi_1 = \psi_3 = \frac{1}{4};\ \psi_2 = \frac{1}{4};$$

$$\eta_1 = \psi_3 \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$-M_i \cdot \psi_1 - M_i\psi_2 + 8\eta_1 = 0$$

$$-M_i\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + 8 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$M_i \cdot \frac{1}{2} = 2 \rightarrow M_i = 4\text{KNm}$$

-Pentru calculul reacțiunii H_2 se elimină legătura corespunzătoare acestei reacțiuni, astfel încît nodul 2 va conține un reazem simplu. Mecanismul obținut este format din două corpuri.

$$2p\begin{cases}\perp \text{ reazem}\\ 1p + (1,2)\end{cases}$$

$$\psi_2 = \frac{1}{8};\ \eta_2 = \psi_2 \cdot 1 = \frac{1}{8}$$

$$\eta_1 = \psi_2 \cdot 4 = \frac{1}{2};\ \psi_1 = \frac{\eta_1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$H_2 \cdot 1 - 8\eta_2 = 0 \rightarrow H_2 = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1\text{KN}$$

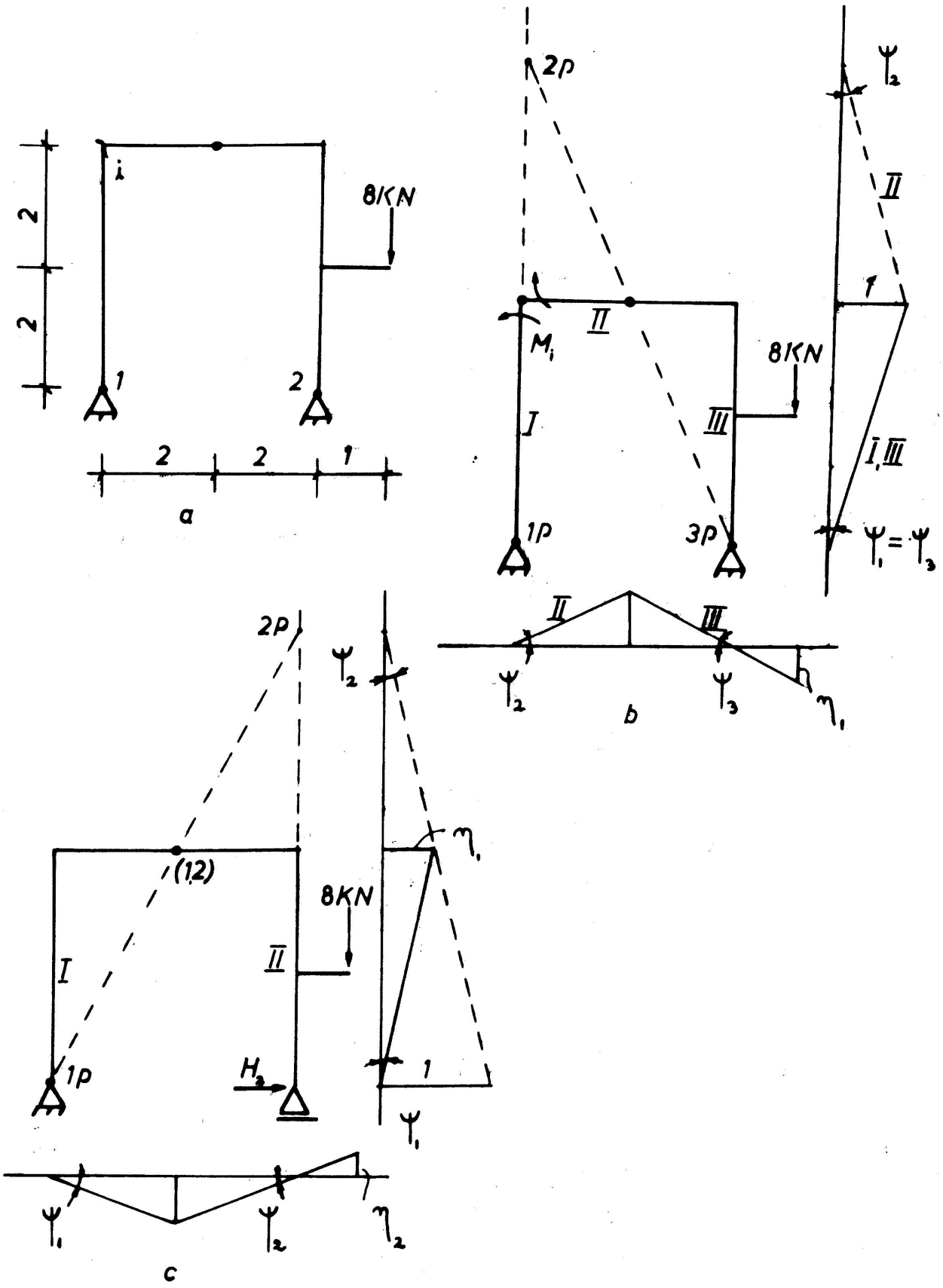


Fig.6.9 Calculul momentului M_i şi a reacţiunii H_2

CAP.7 LINII DE INFLUENŢĂ

7.1 Semnificaţia liniilor de influenţă

Metodele studiate în capitolele precedente permit calculul reacţiunilor şi eforturilor din structurile static determinate produse de forţe cu poziţie fixă. În practică, în afara acţiunilor permanente, cu mărime şi poziţie fixe, există şi forţe mobile, cum sînt acţiunile utile, care pot acţiona în orice punct al structurii. Ca exemple de forţe mobile se pot da: convoaiele de forţe aduse de roţile locomotivei şi vagoanelor la podurile de cale ferată, convoaiele de forţe produse de vehicule cu pneuri şi pe şenile la podurile de şosea, convoaiele produse de podurile rulante, forţa utilă formată din oameni şi utilaje, care se iau în considerare la proiectarea construcţiilor. Convoaiele de acţiuni mobile şi acţiunile utile sînt standardizate şi se dau în norme oficiale. Distanţa între forţele unui convoi mobil este constantă, iar ordinea forţelor nu poate fi modificată la acelaşi convoi. Forţele mobile dintr-un convoi nu-şi modifică mărimea şi orientarea.

Mai mult sînt unele construcţii care suportă în principal acţiunea forţelor mobile – cazul podurilor. Forţele mobile sînt reprezentate de greutatea oamenilor, a maşinilor şi utilajelor de transport. Datorită schimbării poziţiei forţelor exterioare are loc o modificare corespunzătoare a reacţiunilor şi eforturilor.

Se consideră grinda simplu rezemată din fig.7.1 supusă acţiunii sistemului de forţe P_1, P_2,P_3,P_4. Forţele au intensitatea constantă, distanţa dintre forţe este constantă, se schimbă numai poziţia forţelor.

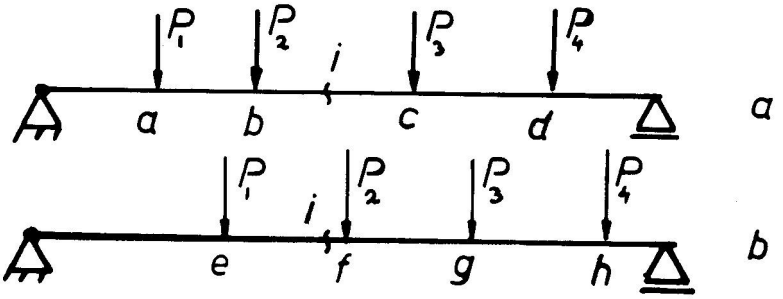


Fig.7.1 Grindă simplu rezemată încărcată cu forţe concentrate

În poziţia din fig.7.1 a forţelor P_1,P_2,P_3,P_4 sînt aplicate în secţiunile a şi b. Un efort S_i din secţiunea i se determină ca sumă a efectelor celor două forţe :

$$(6.4)\ K\,S_i = s_{ia}P_1 + s_{ib}P_2 + s_{ic}P_3 + s_{id}P_4$$

unde s_{ia} reprezintă mărimea efortului S_i cînd grinda ar fi încărcată numai cu o forţă egală cu unitatea acţionînd în secţiunea a iar s_{ib} reprezintă mărimea efortului S_i cînd grinda ar fi încărcată numai cu o forţă egală cu unitatea acţionînd în secţiunea b. În poziţia din fig.7.1b forţele P_1, P_2 ,P_3 ,P_4 sînt aplicate în secţiunile e,f,g,h. Efortul S_i va fi în acest caz:

$$(6.5)\ K\,S_i = s_{ie}P_1 + s_{if}P_2 + s_{ig}P_3 + s_{ih}P_4$$

Se poate trage concluzia că efortul S_i se poate exprima în funcţie de forţele P_1, P_2 ,P_3 ,P_4 şi are nişte coeficienţi de forma s_{ia} , s_{ib} , s_{ic} , s_{id} denumiţi coficienţi de influenţă şi care reprezintă efectul unor forţe egale cu unitatea.

Efortul S_i variază funcţie de poziţia sistemului de forţe,şi în concluzie va exista o valoare maximă pentru acesta.Una din soluţii pentru obţinerea acestei valori maxime ar însemna să se plaseze sistemul de forţe într-o serie de poziţii şi să se determine valoarea S_i corespunzătoare. Prin comparaţia valorilor din şirul astfel obţinut se poate obţine valoarea maximă. O astfel de soluţie conduce la un volum mare de calcul şi un consum mare de timp.

Mai economic, din punct de vedere al calculului, ar fi să se utilizeze linia de influenţă a efortului considerat.

Linia de influenţă este o diagramă care reprezintă variaţia unei mărimi statice- reacţiune sau efort- cînd o forţă egală cu unitatea, de direcţie dată, parcurge structura, deplasîndu-se pe cale.

Liniile de influenţă pot fi obţinute prin două metode:

-metoda analitică

-metoda cinematică

Astfel, metoda analitică se pretează la grinda dreptă simplu rezemată, iar metoda cinematică la grinzile Gerber.

7.2 Metoda analitică

7.2.1 Grinda simplu rezemată

Pentru grinda simplu rezemată din fig.7.2 se va trasa linia de influenţă a reacţiunii V_1 şi a reacţiunii V_2.

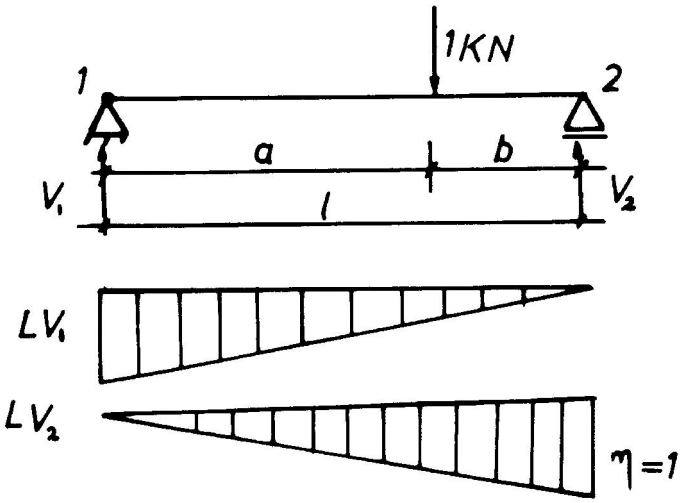


Fig.7.2 Linia de influenţă pentru reacţiunea V_1 şi reacţiunea V_2

Linia de influenţă a reacţiunii V_1 are expresia:

$$V_1 = \frac{1 \cdot b}{l}$$

unde b este variabilă , forţa unitate fiind mobilă.

Introducînd condiţiile la limită asupra variabilei rezultă:

-pentru b=0 , V_1=0

-pentru b=l, V_1=1

Rezultă că atunci cînd forţa unitate se află în secţiunea 2 reacţiunea V_1 este egală cu zero, iar cînd forţa unitate se află în secţiunea 1 reacţiunea V_1 este egală cu 1. Deci, reacţiunea V_1 variază liniar cînd forţa unitate parcurge întreaga grindă. Diagrama care prezintă această variaţie este linia de influenţă a reacţiunii V_1. Linia de influenţă are o scară –respectiv ordonata- şi un semn.

O ordonată a liniei de influenţă a reacţiunii V_1 reprezintă mărimea acestei reacţiuni cînd forţa egală cu unitatea se află chiar în dreptul ordonatei respective.

Linia de influenţă a reacţiunii V_2

Reacţiunea V_2 are expresia:

$$V_2 = \frac{1 \cdot a}{l}$$

unde a este variabilă.
Din condiţiile de limită asupra variabilei rezultă:
-pentru a=0, V_2=0
-pentru a=l, V_2=1
Cu aceste valori a fost construită linia de influenţă a reacţiunii V_2.

Linia de influenţă a forţei tăietoare T_I
Se consideră grinda simplu rezemată din fig. 7.3 pe care se marchează secţiunea I distanţele x şi x' sînt constante.

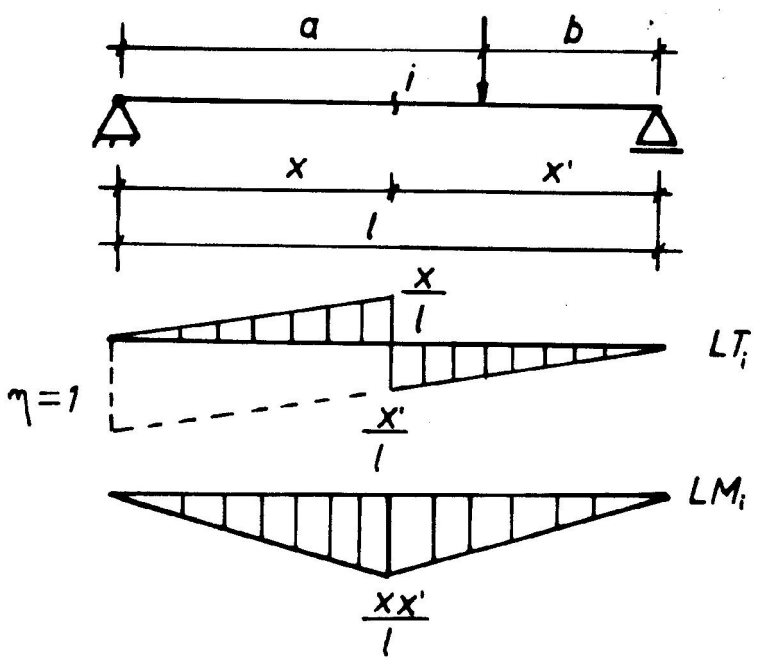


Fig.7.3 Linia de influenţă a forţei tăietoare şi a momentului încovoietor în secţiunea "i"

Reacţiunile au expresiile:

$$V_1 = \frac{1 \cdot b}{l}, V_2 = \frac{1 \cdot a}{l}$$

Se vor analiza două situaţii:
-forţa unitate se află în intervalul i-2($0 \le b \le x'$). În acest caz forţa tăietoare din secţiunea i este egală cu reacţiunea V_1 deci

$$T_i = V_1 = \frac{1 \cdot b}{l}$$

Din condiţiile asupra lui b rezultă:
-pentru b=0, V_1=0 şi T_I=0

-pentru b=x', $V_1 = \frac{x'}{l} si T_i = \frac{x'}{l}$

deci forţa tăietoare are aceeaşi variaţie ca şi reacţiunea V_1.

Forţa unitate se află în intervalul 1-I($0 \le a \le x$)
În acest caz forţa tăietoare din secţiunea I are expresia:

$$T_i = V_1 - 1 = \frac{\lambda \cdot b}{l} - 1 = \frac{1 \cdot a}{l} = -V_2$$

Din condiţiile asupra lui a rezultă:
-pentru a=0, V_2=0 şi T_i
-pentru a=x $V_2 = \frac{x}{l} si \, K T_i = -\frac{x}{l}$

deci forţa tăietoare are aceeaşi variaţie ca şi reacţiunea V_2 dar are semnul minus.
În fig.7.3 au fost reprezentate rezultatele pe cele două intervale, obţinînd linia de influenţă a forţei tăietoare. Suma celor două segmente din secţiunea i este egală cu 1 şi reprezintă scara liniei de influenţă. Se mai constată, la această linie de influenţă faptul că cele două ramuri sînt paralele.

Linia de influenţă a momentului încovoietor M_i:
Se consideră aceleaşi două situaţii ca şi în cazul liniei de influenţă a forţei tăietoare T_i.
Forţa unitate se află în intervalul i-2($0 \le b \le x'$)

$$M_i = V_1 \cdot x = \frac{1 \cdot b}{l} x$$

Din condiţiile la limită se obţine:
-pentru b=0,V_1=0 şi M_I=0
-pentru b=x', V_1=x'/l şi M_I=xx'/l
Forţa unitate se află în intervalul 1-I($0 \le a \le x$)

$$M_i = V_2 \cdot x' = \frac{1 \cdot a}{l} \cdot x'$$

Din condiţiile la limită se obţine:
-pentru a=0, V_2=0 şi M_I=0
-pentru a=x, V_2=x/l şi M_I =xx'/l
Se constată că pentru momentul încovoietor M_i s-a obţinut aceeaşi valoare, calculînd fie pentru forţele din stînga, fie pentru forţele din dreapta.

Scara acestei linii de influenţă este ordonata $\eta = \frac{xx'}{l}$

7.2.2 Grinda cu consolă

Considerînd o secţiune dată "i" în porţiunea dintre reazeme (fig.7.4a), atît timp cît sarcina de 1 parcurge intervalul 1-2 situaţia este la fel ca pentru grinda simplu rezemată, deci linia de influenţă este aceeaşi (fig.7.4b). Cînd sarcina trece pe consolă, linia de influenţă se completează ca pentru reacţiunea V_1 (fig.7.4b), deoarece în acest caz T_I=V_1. Acelaşi rezultat se obţine şi prin folosirea deplasărilor virtuale, deplasarea corespunzătoare forţei tăietoare din secţiunea i fiind arătată în fig. 7.4b.

Pentru o secţiune k situată pe consolă, forţa tăietoare în secţiune este nulă pentru orice poziţie a sarcinii de 1 în intervalul 1-2-k, deci pe acest interval linia de influenţă are ordonate nule. Pentru poziţii ale sarcinii la drepta secţiunii rezultă T_k=1 deci t_{kx}=1, linia de influenţă avînd ordonată constantă pe porţiunea k-3. Acelaşi rezultat se obţine şi folosind deplasarea virtuală, arătată în fig. 7.4e unde se constată că porţiunea de grindă 1-2-k nu se poate deplasa de pe reazeme, respectînd legăturile existente. Condiţia de paralelism între cele două porţiuni

de grindă impune porţiunii k-3 să se deplaseze paralel cu poziţia iniţială; raportul $\delta_x / \delta_k = 1$ dă mărimea ordonatei liniei de influenţă. Această linie de influenţă este aceeaşi ca pentru o grindă 2-3 încastrată în 2.

Cînd secţiunea ar fi situată imediat la stînga, respectiv la dreapta reazemului 2, se obţin liniile de influenţă T_2^{st} (fig.7.4f)şi T_2^{dr}(fig.7.4g) care sînt cazuri particulare ale liniilor de influenţă T_I şi T_k. Ţinînd seama de relaţia $T_2^{dr} = T_2^{st} + V_2$

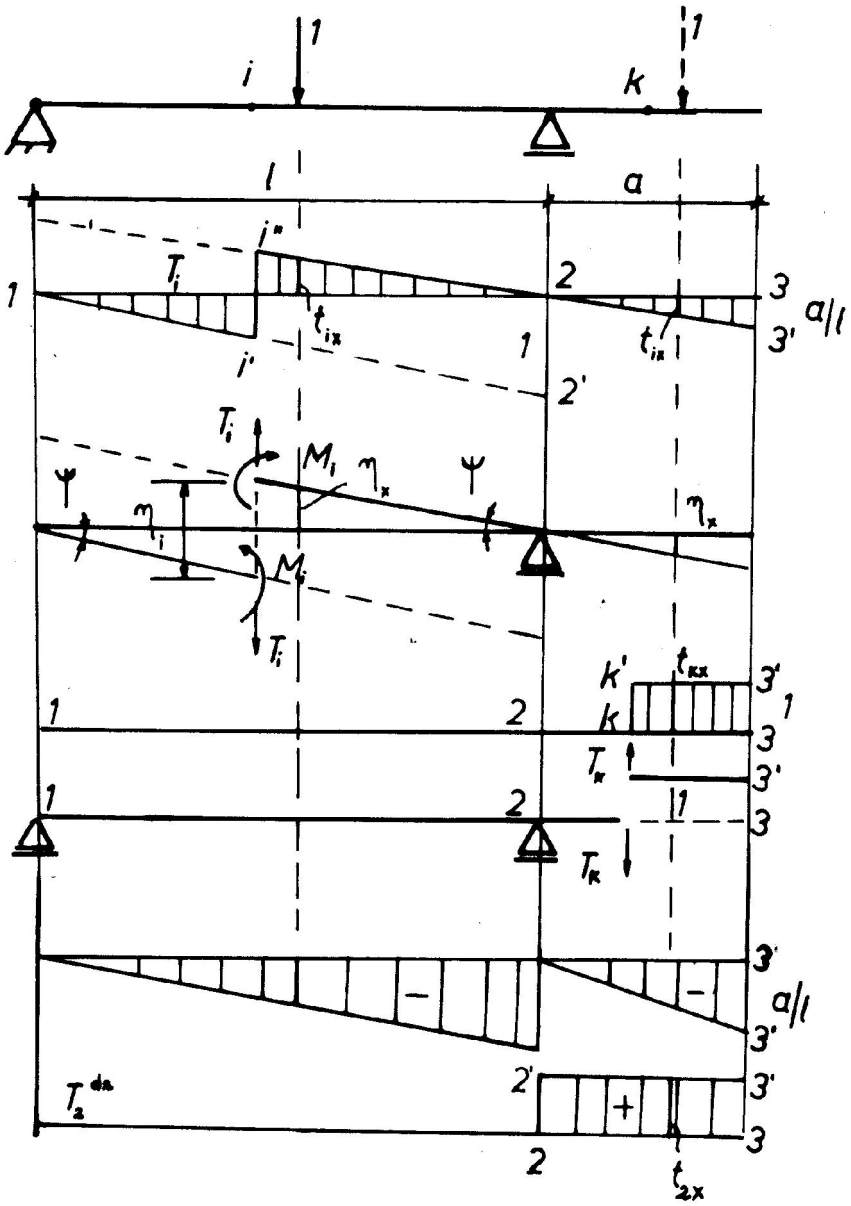


Fig.7.4 Linia de influenţă pentru forţa tăietoare

Deci

$T_2^{dr} - T_2^{st} = V_2$

se constată că liniile de influenţă obţinute o satisfac regăsind linia de influenţă V_2.

În cazul transmiterii indirecte a sarcinilor, liniile de influenţă se obţin în acelaşi mod, corecţia intervenind numai în panoul care conţine secţiunea, sub forma unei variaţii liniare care uneşte punctele corespunzătoare extremităţilor acestui panou.

7.3 Metoda cinematică

Metoda cinematică are la bază utilizarea principiul lucrului mecanic virtual. Structura trebuie transformată într-un mecanism cu un grad de libertate prin eliminarea legăturii pe direcţia mărimii statice (reacţiune sau efort) a cărei linie de influenţă urmează a fi trasată şi în locul ei se introduce mărimea statică S.

Astfel structura va fi încărcată cu mărimea statică S şi cu forţa egală cu unitatea.

Ca notaţii se consideră deplasarea δ_s pe direcţia efortului S şi deplasarea δ_p pe direcţia forţei unitate. Expresia lucrului mecanic virtual, produs de aceste forţe, devine:

$$(7.1)\ \mathrm{K}\, S\delta_s + 1\cdot\delta p = 0$$

Din expresia (6.5) se deduce:

$$(7.2)\ \mathrm{K}\, S = -\frac{\delta_p}{\delta_s}$$

Dacă se consideră deplasarea pe direcţia lui S egală cu unitatea şi de sens invers sensului lui S, adică δ_S=-1 se obţine expresia mărimii S:

$$(7.3)\ \mathrm{K}\, S = \delta_p$$

expresie care arată că în condiţia δ_S=-1, mărimea S are mărimea deplasării secţiunii în care se află forţa egală cu unitatea şi are şi acelaşi semn.

Dacă deplasarea are loc în sensul de acţiune al forţei unitate atunci semnul deplasării δ_p este plus, iar dacă deplasarea are loc în sens invers sensului de acţiune al forţei unitate atunci semnul este minus.

Etapele de trasare a liniei de influenţă sînt:

-structura static determinată se transformă într-un mecanism cu un grad de libertate prin eliminarea legăturii corespunzătoare mărimii S şi se pune în evidenţă mărimea S.

-se consideră o deplasare virtuală δ_s=-1, pe direcţia mărimii statice ce urmează a fi determinată, şi se construieşte diagrama de deplasări virtuale;

-diagrama de deplasări poate fi considerată ca fiind linie de influenţă dacă i se ataşează scara δ_S=-1.

Linii de influenţă la grinzi Gerber:

Exemplul 1: Să se traseze liniile de influenţă pentru momentul M_1, $LT_{4+\varepsilon}$, $LT_{4-\varepsilon}$, LM_5 (fig.7.5)

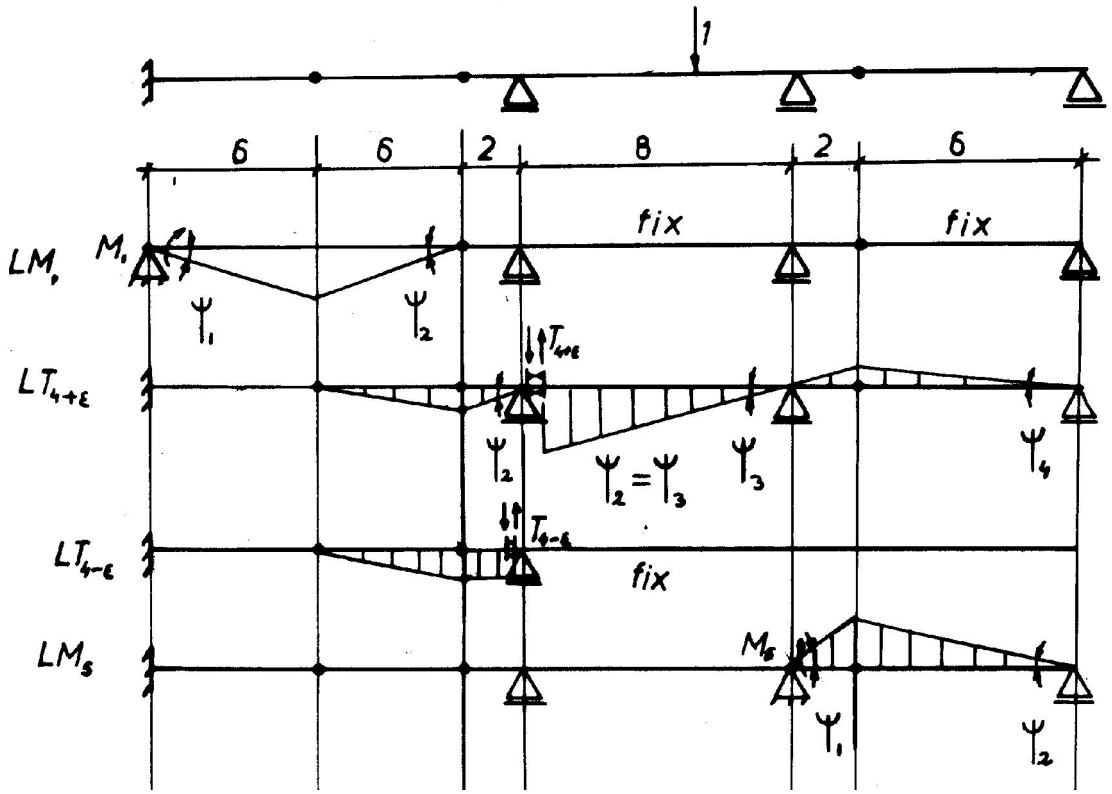


Fig.7.5 Linii de influenţă la grinzi Gerber

Exemplul 2:

Se cer liniile de influenţă pentru reacţiuni şi eforturi la grinda din fig. 7.6 (LV_2,LV_4,LM_4,LM_i)

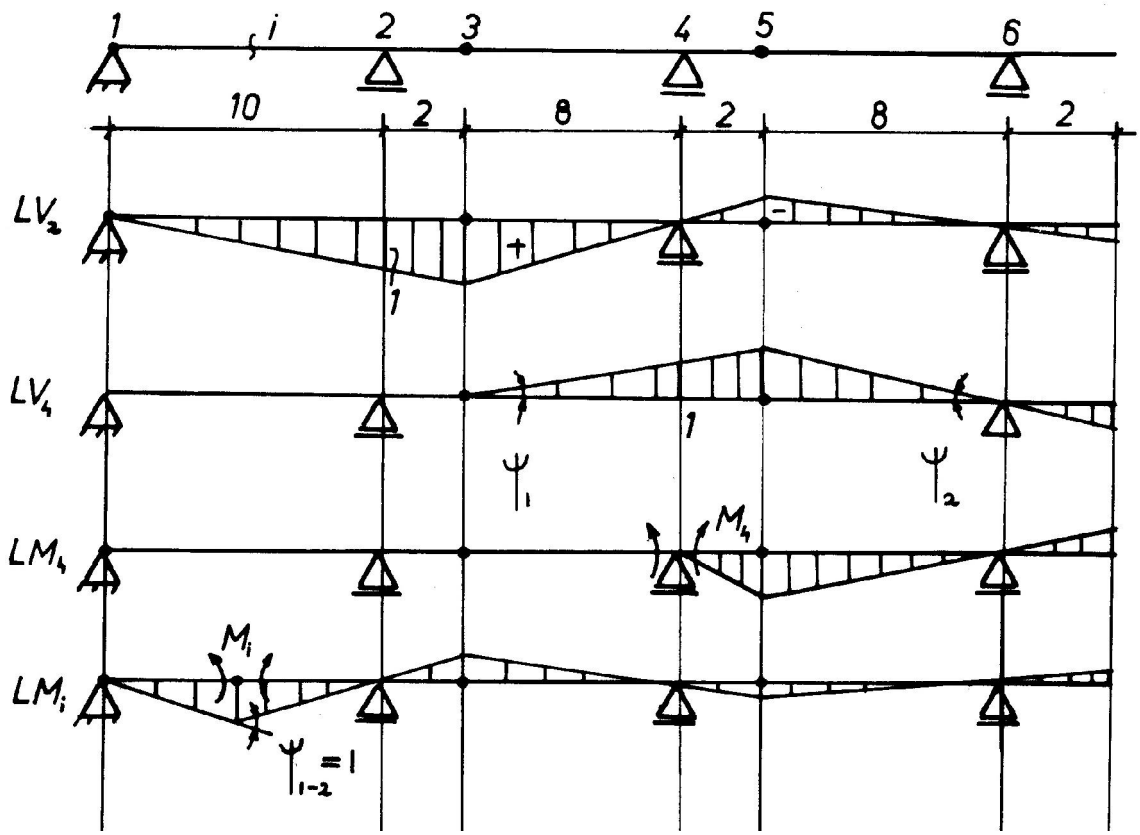


Fig.7.6 Linii de influenţă pentru reacţiuni şi eforturi la o grindă Gerber

CAP.8 DEFORMAREA ELASTICA A STRUCTURILOR

8.1 Vectorul forţă. Vectorul deplasare.

În cazul calculului matriceal al structurilor este necesară alegerea unui sistem de referinţă global în care se defineşte structura. Acest sistem de referinţă este necesar pentru precizarea coordonatelor punctelor de aplicaţie ale forţelor.

Vectorul-forţă se defineşte ca un ansamblu de acţiuni care se aplică asupra unei structuri. Astfel, vectorul –forţă pentru structura din fig. 8.1 este alcătuit din ansamblul forţelor şi momentelor care acţionează concomitent pe structură. Orice sistem de forţe se poate reprezenta printr-un vector ale cărui elemente sînt componentele forţelor şi momentelor care acţionează concomitent pe structură:

$$\{P\} = \{P_1 \text{ K } P_2 \text{ K } P_3 ..... P_{12}\}$$

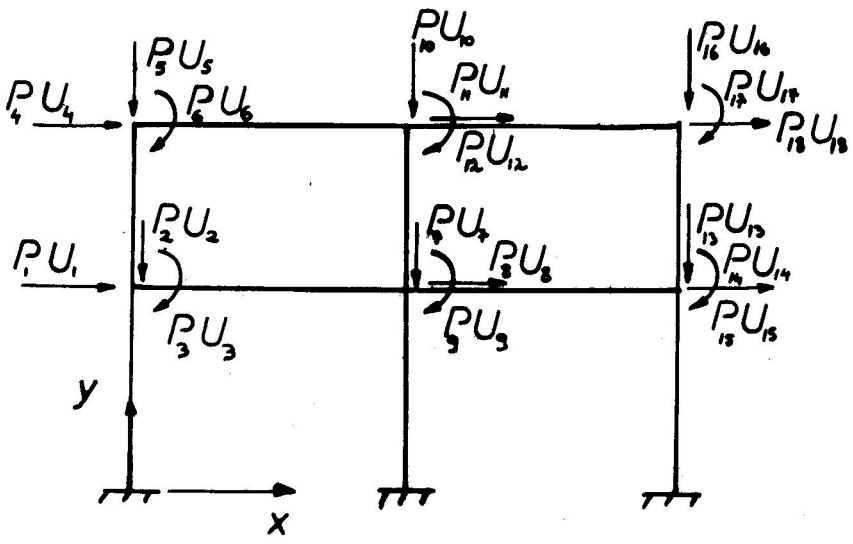


Fig.8.1 Ansamblul forţelor şi momentelor care acţionează pe structură

Sensul pozitiv al forţelor din vectorul de mai sus precum şi sistemul de referinţă global se prezintă în fig.8.1 Primul element al vectorului {P} indică mărimea forţei P_1, al doilea element indică mărimea forţei P_2 şi aşa mai departe. Un semn negativ în vectorul forţelor exterioare arată că forţa respectivă are săgeata opusă faţă de convenţia de semne adoptată. În general asupra unei structuri acţionează mai multe acţiuni independente cum ar fi: greutatea permanentă, acţiunile utile, acţiunea vîntului, acţiunea seismică. Dacă asupra structurii se aplică concomitent două sau mai multe acţiuni, atunci forţa generalizată se poate scrie compact, utilizînd o singură matrice [P].

Fiecare coloană din matricea [P] reprezintă vectorul forţelor dintr-o acţiune aplicată pe structură. Numărul coloanelor din matricea [P] este egal cu numărul ipotezelor de încărcare considerate.

Calculul structurilor static nedeterminate necesită determinarea deplasărilor (liniare sau unghiulare) în anumite secţiuni caracteristice. Deplasările acestor secţiuni pot fi reprezentate printr-un vector (matrice coloană) definit în mod similar ca vectorul forţă. Pentru a definii vectorul-deplasare este necesar să se precizeze secţiunile în care urmează să se calculeze deplasările şi componentele acestor deplasări. Deplasările liniare se reprezintă ca şi forţele, iar deplasările unghiulare ca şi momentele. Deplasările liniare sînt pozitive dacă se produc de sus în jos şi de la stînga la dreapta, iar rotirile sînt pozitive dacă se rotesc în sensul orar. Elementele vectorului-deplasare pentru structura din fig.8.1, se scriu matriceal astfel:

$$\{U\} = [U_1 \text{ K } U_2 \text{ K } U_3 ..... U_{12}]^T$$

8.2 Comportarea structurilor

Înţelegerea corectă a calculului structurilor static nedeterminate impune analiza ipotezelor simplificatoare adoptate. De exemplu, în domeniul micilor deplasări, ecuaţiile de echilibru static se scriu pe structura iniţială nedeformată.

În urma aplicării acţiunilor asupra construcţiilor acestea se deformează şi în structură iau naştere eforturi. Structura poate avea o comportare elastică sau neelastică după răspunsul pe care-l dă la aplicarea acţiunilor. Astfel, dacă după înlăturarea acţiunilor aplicate pe structură aceasta revine la poziţia iniţială, structura are o comportare elastică şi deformaţia structurii este elastică.

Dacă după înlăturarea acţiunilor de pe structură aceasta nu revine la poziţia iniţială, structura are comportare neelastică. Cînd după înlăturarea acţiunilor în structură se păstrează unele deformaţii permanente, structura se află în domeniul plastic şi deformaţiile remanente sînt deformaţii plastice. Comportarea elastică sau neelastică a structurii depinde de natura materialului folosit la realizarea construcţiei.

Dacă structura este realizată dintr-un material elastic şi se află în domeniul micilor deplasări, se poate admite proporţionalitatea între forţele aplicate pe structură şi deplasările elastice corespunzătoare.

Comportarea liniară:

Analog curbei σ-ε (fig.1.4) există o relaţie de legătură între forţele aplicate pe structură şi deplasările elastice ale unei secţiuni, reprezentată prin curbele P-U (fig.8.2) de unde rezultă că forţele aplicate pe structură sînt proporţionale cu deplasările.

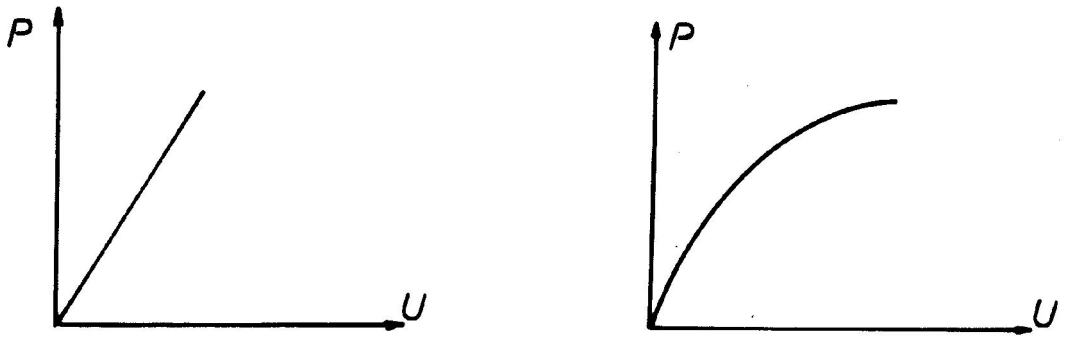


Fig.8.2 Relaţia forţă-deplasare (liniară şi neliniară)

{P}=[K]{U}

Comportarea neliniară:

Cauzele care produc comportarea neliniară a sistemelor structurale, în cele mai multe cazuri, se încadrează în următoarele grupe:

-*neliniaritatea materialului* (fizică) conţine fenomenul fizic care apare în materialele de construcţie în timpul deformaţiei. Tipice pentru această neliniaritate sint diferitele materiale cu comportare elasto-plastică şi fenomenul de fluaj.

-*neliniaritatea geometrică* în cazul în care se admite relaţia $\sigma - \varepsilon$ liniară, relaţia P-U este neliniară, deplasările pot fi mici sau mari dar rotirea de corp rigid să fie mică. Relaţia deformaţie specifică –deplasare este neliniară.

8.3 Lucrul mecanic al forţelor exterioare

Prin deformarea structurii punctele de aplicaţie ale forţelor îşi schimbă poziţia şi ca urmare a forţelor exterioare produc lucru mecanic, denumit pe scurt lucru mecanic exterior.

Dacă forţa se deplasează în sensul său de acţiune, lucrul mecanic este denumit motor şi va fi considerat pozitiv. Dacă forţa se deplasează în sens invers sensului său de acţiune, lucrul mecanic este denumit rezistent şi va fi considerat negativ.

În cazul corpurilor deformabile sînt posibile două situaţii în care forţele exterioare produc lucru mecanic.

-forţa efectuează lucru mecanic parcurgînd deplasarea produsă de ea însăşi prin deformarea structurii asupra căreia acţionează;

-forţa efectuează lucru mecanic parcurgînd deplasarea, pe direcţia sa, dar produsă de o altă forţă, ce acţionează asupra structurii.

Analiza acestor două situaţii va permite evidenţierea diferenţei dintre ele.

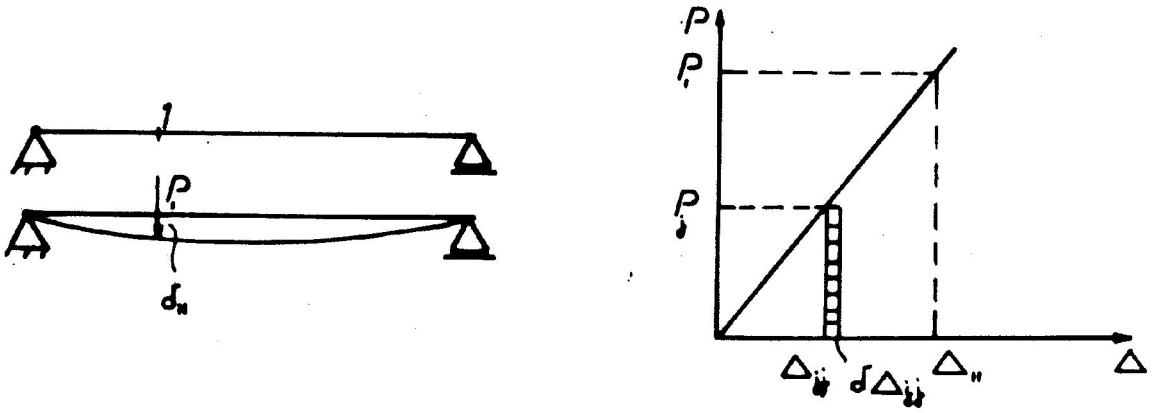


Fig.8.3 Lucrul mecanic produs de o forţă parcurgînd deplasarea produsă de ea însăşi

Fie grinda simplu rezemată din fig. 8.3a ce se încarcă cu o forţă concentrată aplicată static. Pe măsură ce intensitatea forţei creşte de la valoarea zero la valoarea finală P_1, punctul său de aplicaţie se deplasează cu Δ_{11}.

Pentru a determina lucrul mecanic efectuat de forţa P_1 se porneşte de la variaţia lucrului mecanic.

(8.1) K $dL_{ex} = P_j d\Delta_{jj}$

care reprezintă suprafaţa elementară de formă dreptunghiulară, haşurat în fig.8.3.

Lucrul mecanic al forţei P_1va fi

(8.2) K $L_{ex} = \int dL_{ex} = \int_0^{\Delta_n} P_j d\Delta_{jj}$

Observînd că $P_j = \Delta_j \frac{P_1}{\Delta_{11}}$ rezultă:

(8.3) K $L_{ex} = \frac{P_1}{\Delta_{11}} \int_0^{\Delta} \Delta_{jj} d\Delta_{jj} = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11}$

ceea ce arată că lucrul mecanic efectuat de forţa P_1 este egal cu jumătate din produsul dintre forţă şi deplasarea pe direcţia forţei .

Fie grinda din figura 8.3 care prin încărcare cu forţa P_1 a ajuns în poziţia deformată. Dacă în această situaţie se aplică o nouă forţă P_2, (fig.8.4) grinda se deformează în continuare, iar punctul de aplicaţie al forţei P_1 se deplasează cu Δ_{12}.Forţa P_1 va parcurge această deplasare cu întreaga sa intensitate, deci lucrul mecanic va fi:

(8.4) K $L_{ex} = P_1 \Delta_{12}$

Trebuie reţinută diferenţa principală dintre cele două situaţii de producere a lucrului mecanic de către o forţă ce acţionează asupra unui corp deformabil.

-Suprafaţa cuprinsă între dreapta 0-1 şi axa 0-P este denumită lucru mecanic complementar. În cazul corpurilor la care relaţia forţă-deplasare este liniară lucrul mecanic complementar este egal cu lucrul mecanic exterior.

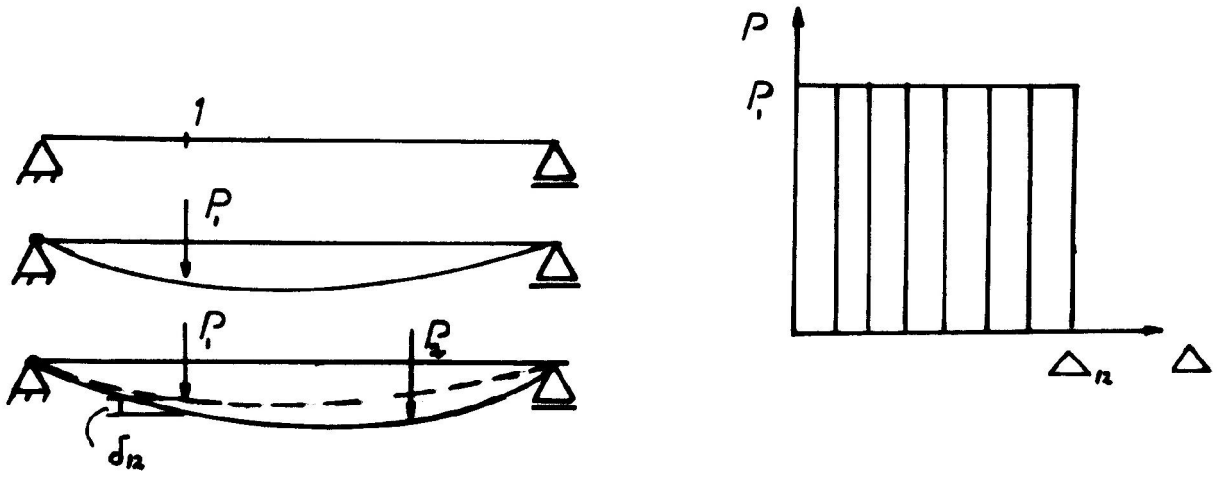


Fig.8.4 Lucrul mecanic produs de forţa P_1 parcurgînd deplasarea produsă de forţa P_2

-Deplasările au fost notate cu doi indici, primul arată direcţia forţei pe care are loc deplasarea, iar al doilea forţa care a produs deplasarea.

-Cînd asupra corpului elastic se aplică simultan mai multe forţe, expresia (8.3) a lucrului mecanic exterior capătă forma: (8.5) K $L_{ex} = \frac{1}{2}\sum P_i \Delta_{ii}$ K $(i = 1,...n)$

În situaţia a doua de încărcare, cînd pe corpul elastic există sistemul de forţe P_I şi ulterior se aplică sistemul de forţe P_j lucrul mecanic exterior are expresia:

(8.6) K $L_{ex} = \sum P_i \Delta_{ij}$

8.4 Lucrul mecanic al forţelor interioare. Lucrul mecanic al eforturilor.

Se consideră o bară subţire supusă la întindere de perechea de forţe P.

Dacă se presupune că bara este formată dintr-un şir de puncte materiale aflate la distanţa dx, sub acţiunea forţelor P două puncte materiale se deplasează cu cantitatea Δ(dx), iar forţa de atracţie va produce lucrul mecanic interior dL_I

(8.7) K $dL_i = -P\Delta(dx)$

Semnul minus apare datorită faptului că forţele P se deplasează în sens invers sensului lor de acţiune, deci lucrul mecanic interior este un lucru mecanic rezistent.

Dacă se presupune că bara este alcătuită dintr-un mediu continuu şi prin metoda secţiunilor se izolează un element de lungime dx atunci în secţiunile de capăt se introduc eforturile de întindere P ca acţiuni exterioare. Alungirea elementului fiind Δ(dx), lucrul mecanic al forţelor axiale va fi:

(8.8) K $dL_{ef} = P\Delta(dx)$

În acest caz dL_{ef} este pozitiv deoarece deplasarea are loc în sensul forţei axiale P.

Din compararea celor două situaţii rezultă:

$dL_i = -dL_{ef}$

Lucrul mecanic al eforturilor are loc ca urmare a faptului că se produce deformarea corpului elastic. Se obişnuieşte să se utilizeze şi denumirea de energie de deformaţie acumulată de corp, care se notează cu litera W. Deci:

(8.9) K $L_{ef} = W$

Din Rezistenţa Materialelor se ştie că energia de deformaţie pentru un volum elementar $dV = dx \cdot dy \cdot dz$,este:

$dW = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon dV$, în cazul solicitării cubului elementar cu eforturile unitare normale $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

În cazul solicitării cu eforturi unitare tangenţiale $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$ atunci $dW = \frac{1}{2}\tau\gamma dV$

iar energia de deformaţie pentru întregul corp este:

$W = \frac{1}{2}\int_V \sigma\varepsilon dV$,respectiv $W = \frac{1}{2}\int_V \tau\gamma dV$

Energia de deformaţie pentru solicitări simple este:

Solicitare axială Deoarece N=σA şi σ=Eε rezultă:

(8.10) K $W = \frac{1}{2}\int_A \int_0^l \frac{1}{E}\sigma^2 dAdx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{EA^2}dx \int_A dA = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{EA}dx$

Încovoiere . În acest caz $\sigma = \frac{M_y}{I}$ deci

(8.10*a*) K $W = \frac{1}{2}\int_A y^2 dA \int_0^l \frac{M^2}{EI^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}dx$

deoarece $\int_A y^2 dA = I$

Lunecare Ţinînd seama că $\tau = \frac{TS}{bI}$, K $\tau = G\gamma$, se obţine:

(8.11) K $W = \frac{1}{2}\int_A \int_0^l \frac{1}{G}\tau^2 dAdx = \frac{1}{2G}\int_0^l dx \int_A \left(\frac{TS}{bI}\right)^2 dA = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\alpha T^2}{GA}dx$ unde s-a notat cu $\alpha = \int_A \frac{AS^2}{b^2 I^2}dA$ reprezentînd un coeficient ce depinde de forma secţiunii transversale.

În cazul solicitării compuse energia de deformaţie acumulată de bară este:

(8.12) K $W = \frac{1}{2}\int \frac{N^2}{EA}dx + \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\alpha T^2}{GA}dx$

Pentru structuri formate din mai multe bare, integralele (8.12) se extind asupra tuturor barelor.

În cele ce urmează se va determina expresia lucrului mecanic al eforturilor.

Solicitarea axială

(8.13) K $L_M = \frac{1}{2}\int Ndu = \frac{1}{2}\int N\varepsilon dx = \frac{1}{2}\int N\frac{\sigma}{E}dx = \frac{1}{2}\int \frac{N^2}{EA}dx$

.b. Încovoiere

(8.14) K $L_M = \frac{1}{2}\int Md\phi = \frac{1}{2}\int M\frac{1}{\rho}dx = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}dx$

deoarece $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

c.Lunecare

(8.15) K $L_T = \frac{1}{2}\int Tdv = \frac{1}{2}\int T\gamma_m dx = \frac{1}{2}\int \frac{\alpha T^2}{GA}dx$

Pentru solicitarea compusă lucrul mecanic al eforturilor are expresia:

(8.16) K $L_{ef} = \frac{1}{2}\int \frac{N^2}{EA}dx + \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\alpha T^2}{GA}dx$

Se constată că:

L_{ef}=W

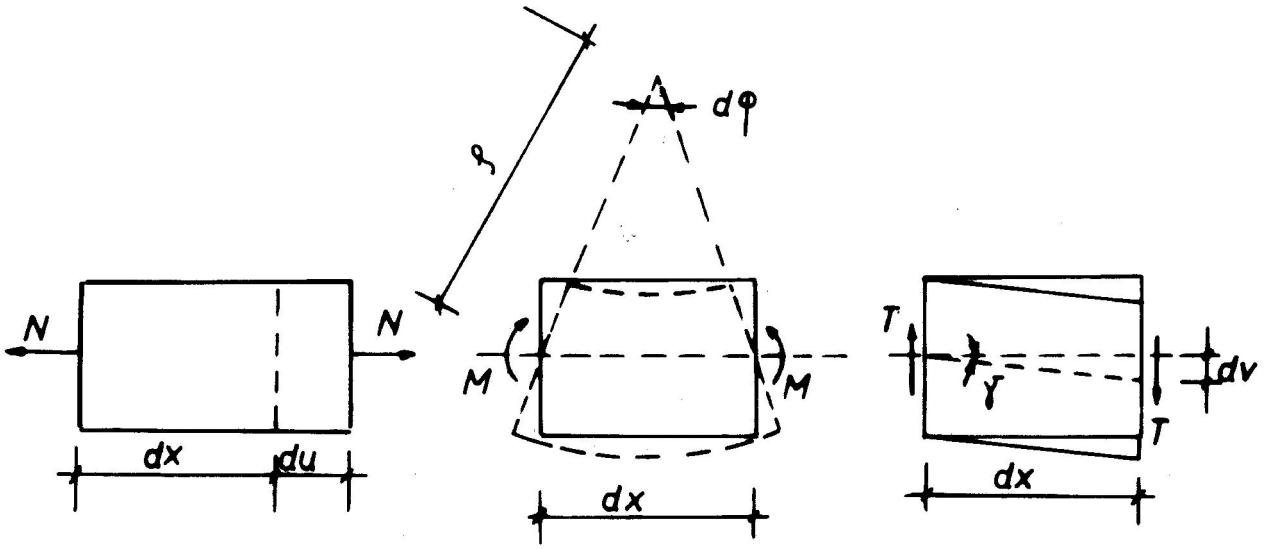


Fig.8.5 Prezentarea deplasărilor generalizate pentru un element de bară de lungime dx

8.5 Lucrul mecanic total

Rezultatele stabilite în paragrafele precedente permit să se evalueze lucrul mecanic total produs, în cursul deformării barei sau structurii, atît de forţele exterioare cît şi de eforturi:

(8.17) K $L_{tot} = L_{ex} + L_{\text{int}} = L_{ex} - L_{ef} = L_{ex} - W$

În cazul în care forţele aplicate static şi eforturile corespunzătoare parcurg deplasările şi deformaţiile produse de ele însile, lucrul mecanic total are forma:

(8.17*a*) K $L_{tot} = \frac{1}{2}\sum P_i \Delta_{ii} - \frac{1}{2}\int \frac{N_i^2}{EA}dx - \frac{1}{2}\int \frac{M_i^2}{EI}dx - \frac{1}{2}\int \frac{\alpha T_i^2}{GA}dx$

În cazul în care forţele şi eforturile din situaţia de încărcare i parcurg deplasările şi deformaţiile produse de situaţia de încărcare j, lucrul mecanic total are expresia:

(8.18) K $L_{tot} = \sum P_i \Delta_{ij} - \int \frac{N_i N_j}{EA}dx - \int \frac{M_i M_j}{EI}dx - \int \frac{\alpha T_i T_j}{GA}dx$

8.6 Teorema lui Clapeyron

Prin ipotezele simplificatoare ale calculului de ordinul I s-a admis că energia de deformaţie acumulată de structură prin trecere în poziţie deformată este integral consumată pentru aducerea structurii în poziţia iniţială, la îndepărtarea încărcărilor care au produs deformaţia. Structurile de rezistenţă care satisfac această condiţie se numesc sisteme conservative.

De asemenea, s-a admis că forţele se aplică static, respectiv energia cinetică a sistemului în cursul deformării este egală cu zero. Teorema energiei exprimă faptul că variaţia energiei cinetice într-un interval de timp este egală cu variaţia lucrului mecanic, deci:

(8.19) K $dE = dL$

iar dacă intervalul de timp este reprezentat de momentele 1 şi 2 rezultă:

(8.20) K $E_2 - E_1 = L_{12}$

Considerînd că momentele 1 şi 2 reprezintă începutul şi finalul deformării structurii rezultă că:

(8.21) K $L_{12} = L_{tot} = L_{ex} - L_{ef}$

Deoarece energia cinetică este egală cu zero, din (8.21) rezultă:

(8.22) K $L_{tot} = L_{ex} - L_{ef} = L_{ex} - W = 0$

ceea ce înseamnă că relaţia 8.22 exprimă faptul că în cazul sistemelor conservative, aflate în echilibru, lucrul mecanic total este egal cu zero.

Relaţia de mai sus se poate scrie sub una din formele:

$L_{ex} = L_{ef}$ K *sau* K $L_{ex} = W$

Ea reprezintă teorema lui Clapeyron, teoremă care se enunţă astfel: "pentru un sistem conservativ, aflat în echilibru sub acţiunea unui sistem de forţe, lucrul mecanic produs de forţelor exterioare este egal cu energia potenţială de deformaţie acumulată în sistem".

8.7 Principiul lucrului mecanic virtual aplicat corpurilor deformabile

Principiul deplasărilor virtuale stabileşte condiţia necesară şi suficientă pentru exprimarea echilibrului unui sistem material: suma lucrurilor mecanice virtuale corespunzătoare tuturor forţelor la care este supus sistemul trebuie să fie nulă pentru orice deplasare virtuală compatibilă cu legăturile. La aplicarea acestui principiu este necesar să se precizeze pe de o parte care este ansamblul de forţe ce-şi fac echilibru, iar pe de alta care este configuraţia deplasării virtuale compatibile cu legăturile ce se dă pornind de la poziţia de echilibru.

Cît timp principiul deplasărilor virtuale a fost utilizat la rezolvarea structurilor static determinate, pentru aflarea reacţiunilor sau eforturilor, deformarea structurii nu a intervenit. Aceasta, deoarece s-a admis –pe baza ipotezei simplificatoare- că poziţia iniţială nedeformată poate fi considerată şi ca poziţie de echilibru sub acţiunea sarcinilor. Totodată, aplicarea ca acţiuni exterioare a necunoscutelor ce trebuie determinate se obţine prin suprimarea legăturilor corespunzătoare, ceea ce conduce la sisteme cu grade de libertate, astfel că deplasările virtuale au caracter cinematic, în sensul că părţile componente ale sistemului se consideră perfect rigide. Înseamnă că forţele interioare care se dezvoltă in structură sub acţiunea sarcinilor nu produc lucru virtual, deoarece deplasările corespunzătoare lor sînt nule.

În consecinţă, la rezolvarea structurilor static determinate a fost suficient să se considere ca sistem de forţe în echilibru numai ansamblul forţelor exterioare (sarcini şi reacţiuni).

Problema se schimbă cînd trebuie aflate necunoscutele suplimentare la rezolvarea structurilor static nedeterminate, sau cînd se studiază poziţia deformată a unei structuri static determinate sau static nedeterminate. În asemenea cazuri este necesar să se considere situaţia de echilibru elastic a structurii şi deci deplasările virtuale trebuie date astfel încît să intervină şi deformarea elementelor ds ale barelor. Prin aceasta, forţele interioare efectuează şi ele lucru virtual, care trebuie introdus în condiţia de echilibru. Rezultă că sistemul de forţe în echilibru este reprezentat de forţele exterioare şi de forţele interioare care le echilibrează. Lucrul virtual total se obţine sumînd lucrul virtual produs de forţele exterioare cu cel produs de forţele interioare; această sumă trebuie egalată cu zero.

Privitor la configuraţia deplasărilor virtuale, în rezolvarea problemelor menţionate nu mai apar sisteme cu grade de libertate şi deci deplasările nu mai pot avea caracter cinematic. Deplasările virtuale trebuie date unor sisteme static determinate sau static nedeterminate, şi în consecinţă trecerea în poziţia deplasată trebuie să fie caracterizată prin deformarea elementelor ds ale structurii. Condiţia de compatibilitate capătă astfel o nouă semnificaţie, în sensul că alături de respectarea legăturilor existente în rezemări, mai este necesară ca în poziţia deplasată deformările succesiunii de elemente ds să fie compatibile între ele, respectînd continuitatea de material a barelor. Aceasta revine la a spune că deplasarea virtuală trebuie să fie reprezentată de o poziţie deformată posibilă a structurii, deci care să poată fi produsă în realitate de acţiunea unei cauze, oricare ar fi această cauză. Astfel, se poate considera ca deplasare virtuală poziţia deformată corespunzătoare acţiunii unui sistem de sarcini arbitrar ales, a efectului unei variaţii de temperatură.

O dată precizat specificul celor două elemente care intervin cînd principiul deplasărilor virtuale este aplicat la structuri deformabile şi anume alcătuirea sistemului de forţe în echilibru, precum şi caracterul deplasării virtuale compatibile, este necesar de subliniat că acestea sînt independente, în sensul că între ele nu există nici un raport de cauzalitate. Aceasta revine la a admite că cele două elemente provin de la două situaţii diferite de încărcare ale structurii considerate. În fiecare situaţie sînt desigur îndeplinite ambele condiţii (cea de echilibru a forţelor şi cea de compatibilitate a deformatei, dar pentru aplicarea principiului deplasărilor virtuale se consideră de la fiecare dintre situaţii numai cîte unul din elemente, împreună cu condiţia pe care aceasta o satisface:

(1) una din situaţii dă sistemului de forţe, reprezentat de forţele exterioare şi de forţele interioare, care îndeplineşte numai condiţia de a fi în echilibru;
(2) cealaltă situaţie dă configuraţia deplasării virtuale, reprezentată de poziţia deformată a structurii, care îndeplineşte numai condiţia de a fi compatibilă cu legăturile din rezemări şi cu continuitatea de material a barelor.

Este uşor de văzut că, dintre cele două situaţii diferite de încărcare ale structurii numai una poate fi situaţia reală corespunzătoare problemei care se studiază. Rezultă că cealaltă trebuie să fie o situaţie auxiliară aleasă în mod arbitrar, desigur astfel ca să conducă la o rezolvare cît mai simplă.

Din enunţarea principiului rezultă că dacă sistemul de forţe considerat este în echilibru şi deplasarea virtuală dată este compatibilă, lucrul mecanic virtual se anulează în mod necesar. Această enunţare conţine de fapt trei condiţii –echilibrul sistemului de forţe, compatibilitatea deplasării virtuale şi anularea lucrului mecanic virtual-care sînt însă dependente între ele, în sensul că dacă două dintre aceste condiţii sînt îndeplinite, implicit este îndeplinită şi a treia. Se pot astfel enunţa următoarele variante:

(1) dacă deplasarea virtuală dată este compatibilă, condiţia de lucru mecanic virtual nul este suficientă pentru a asigura că sistemul de forţe este în echilibru;
(2) dacă sistemul de forţe considerat este în echilibru, condiţia de lucru mecanic virtual nul este suficientă pentru a asigura că deplasarea dată este compatibilă.

Acestor două variante le corespund două moduri diferite de aplicare a principiului deplasărilor virtuale, privitor la modul de alegere a situaţiei axiliare, după cum pentru problema dată este necesar să se exprime condiţia de echilibru a forţelor care acţionează structura, sau condiţia de compatibilitate a deformatei sale.

8.8 Teoremele lui Castigliano

Teoremele lui Castigliano se obţin din cele două variante ale principiului lucrului mecanic virtual.

Prima teoremă. Se consideră corpul din Fig. 8.6a căruia i se aplică deplasarea virtuală reprezentată în fig.8.6b

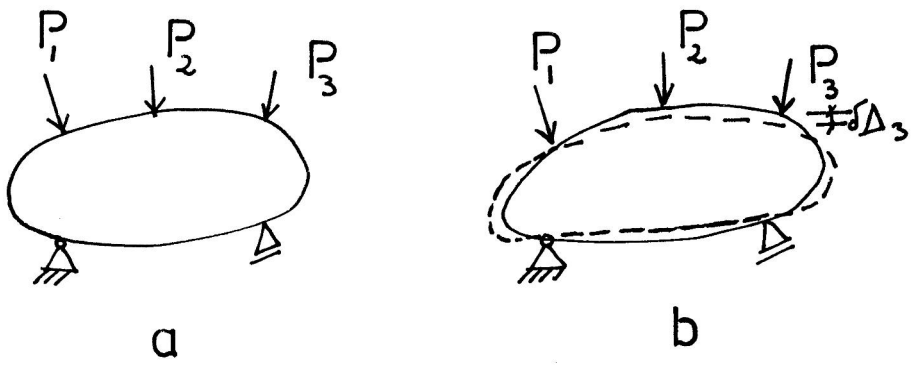


Fig.8.6 Corp oarecare căruia i se aplică o deplasare virtuală

Lucrul mecanic virtual efectuat de forţele exterioare este:

(8.27) K $\delta L_{ex} = P_1\delta\Delta_1 + P_2\delta\Delta_2 + ...P_n\delta\Delta_n$

Dar $\delta L_{ex} = \delta W$ .Considerînd variaţia energiei de deformaţie în raport cu fiecare deplasare se obţine:

(8.28) K $\frac{\partial W}{\partial \Delta_1} = P_1$, K $\frac{\partial W}{\partial \Delta_2} = P_2, ..., \frac{\partial W}{\partial \Delta_n} = P_n$

Din relaţia de mai sus rezultă că "derivata parţială a energiei de deformaţie în raport cu deplasarea pe direcţia unei forţe este egală cu valoarea acestei forţe " ceea ce reprezintă prima teoremă a lui Castigliano.

A doua teoremă. Se consideră acum că, în situaţia de echilibru a aceluiaşi corp, se dă o variaţie δPi forţelor exterioare. Lucrul mecanic virtual are forma: $\delta L^* = \Delta_1\delta P_1 + \Delta_2\delta P_2 + ... + \Delta_n\delta P_n$

Conform principiului forţelor virtuale $\delta L^* = \delta W^*$

Considerînd variaţia energiei de deformaţie în raport cu fiecare variaţie a forţelor se obţine:

(8.29) K $\frac{\partial W^*}{\partial P_1} = \Delta_1, \frac{\partial W''}{\partial P_2} = \Delta_2, ..., \frac{\partial W^*}{\partial P_2} = \Delta_n$

Din (8.29) rezultă că "derivata parţială a energiei de deformaţie în raport cu o forţă este egală cu deplasarea pe direcţia acestei forţe" ceea ce reprezintă a doua teoremă a lui Castigliano".

8.9 Teorema generală a reciprocităţii şi formele sale particulare

8.9.1 Teorema reciprocităţii lucrului mecanic (teorema Betti)

Utilizarea în paralel a două situaţii diferite de încărcare pentru o structură, permite să se stabilească o teoremă generală a echilibrului elastic.

Fie două situaţii de încărcare (fig.8.7), anume prima caracterizată prin forţele exterioare P_i şi eforturile M,N, iar a doua prin forţele exterioare $\bar{P}_j$ şi eforturile $\bar{M}, \bar{N}$.

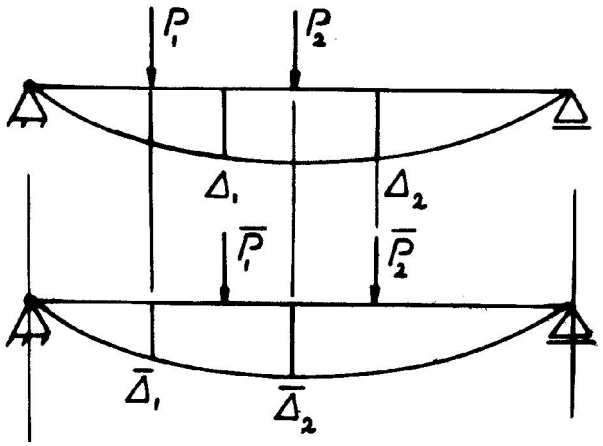


Fig.8.7 Grindă dreaptă simplu rezemată în două situaţii de încărcare

Folosind principiul deplasărilor virtuale (sau legea conservării energiei) sau stabilit relaţiile:

$\sum P_i \bar{\Delta}_i = \int M d\bar{\theta} + \int N d\bar{\delta}_t + ...$ şi $\sum \bar{P}_j \Delta_j = \int \bar{M}\, d\theta + \int \bar{N}\, d\delta_t + ...$

Pentru cazul deformării elastice, deplasările relative $d\theta, d\delta_t$ şi respectiv $d\bar{\theta}, d\bar{\delta}_t$ au expresiile:

$$d\theta = \frac{M}{EI}ds \quad d\delta_t = \frac{N}{EA}ds \quad d\delta_n = \frac{kT}{GA}ds \quad d\phi = \frac{M_t}{GI_t}ds$$

$$d\bar{\theta} = \frac{\bar{M}}{EI}ds \quad d\bar{\delta}_t = \frac{\bar{N}}{EA}ds \quad d\bar{\delta}_n = \frac{k\bar{T}}{GA}ds \quad d\bar{\phi} = \frac{\bar{M}_t}{GI_t}ds$$

Introducîndu-le în cele două relaţii generale, se constată că pentru ambele membrul al doilea rezultă cu aceeaşi expresie, anume

$$\int \frac{M\bar{M}}{EI}ds + \int \frac{N\bar{N}}{EA}ds + \int \frac{kT\bar{T}}{GA}ds + \int \frac{M_t\bar{M}_t}{GI_t}ds$$

ceea ce înseamnă că şi primii membrii trebuie să fie egali. Se obţine relaţia

$$(8.30)\ \mathrm{K} \sum P_i \bar{\Delta}_i = \sum \bar{P}_j \Delta_j$$

care exprimă teorema generală a reciprocităţii, stabilită de Betti în 1872 şi care se enunţă astfel: Pentru o structură considerată în două situaţii diferite de încărcare, lucrul mecanic dat de forţele exterioare din prima situaţie parcurgînd deplasările care le corespund în poziţia deformată produsă de a doua situaţie, este egal cu lucrul mecanic dat de forţele exterioare din a doua situaţie parcurgînd deplasările care le corespund în poziţia deformată dată de prima situaţie..

De reţinut că în această teoremă, denumită şi teorema reciprocităţii lucrului mecanic, care pune în reciprocitate cele două situaţii de încărcare, intervine numai lucrul mecanic al forţelor exterioare. Aşa cum s-a arătat anterior, una dintre situaţii va fi desigur cea reală corespunzătoare problemei care se studiază; cealaltă se alege în mod arbitrar, adaptînd-o obţinerii unor rezultate simple şi expresive

8.9.2 Reciprocitatea deplasărilor unitare

Se aplică relaţia 8.30 şi rezultă:

$$(8.31)\ \mathrm{K}\ P_i\Delta_{ij} = P_j\Delta_{ji}$$

Dacă se consideră $P_i=P_j=1$ şi se notează cu δ deplasările produse de forţe, se obţine:

$$1\cdot\delta_{ij} = 1\cdot\delta_{ji}$$

sau

$$(8.32)\ \mathrm{K}\ \delta_{ij} = \delta_{ji}$$

Relaţia 8.32 arată că deplasarea din secţiunea i, după direcţia forţei din i, produsă de o forţă egală cu unitatea aplicată în j , este egală cu deplasarea din secţiunea j, după direcţia forţei din j, produsă de o forţă egală cu unitatea aplicată în i. (fig.8.8)

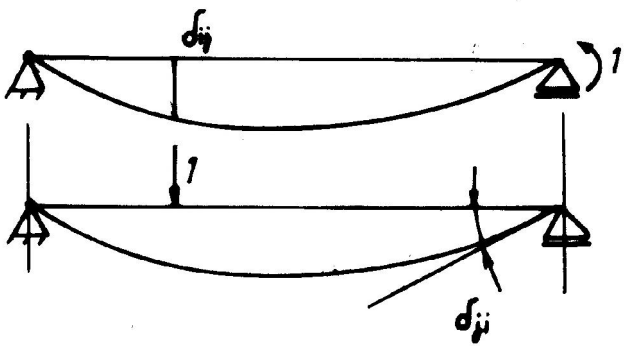


Fig.8.8 Exemplu reciprocitate deplasări unitare

Reciprocitatea deplasărilor unitare se utilizează la rezolvarea structurilor static nedeterminate prin metoda forţelor.

8.9.3 Reciprocitatea reacţiunilor unitare

În acest caz structura se încarcă numai cu deplasări. În cazul structurilor static determinate, datorită numărului minim de legături pe care aceste structuri le au pentru asigurarea invariabilităţii geometrice şi fixării faţă de teren, deplasările pe direcţiile unor legături provoacă numai modificarea configuraţiei structurii nu şi deformarea ei. Ca atare, în structură nu apar reacţiuni şi eforturi. De aceea, reciprocitatea reacţiunilor unitare este specifică structurilor static nedeterminate.

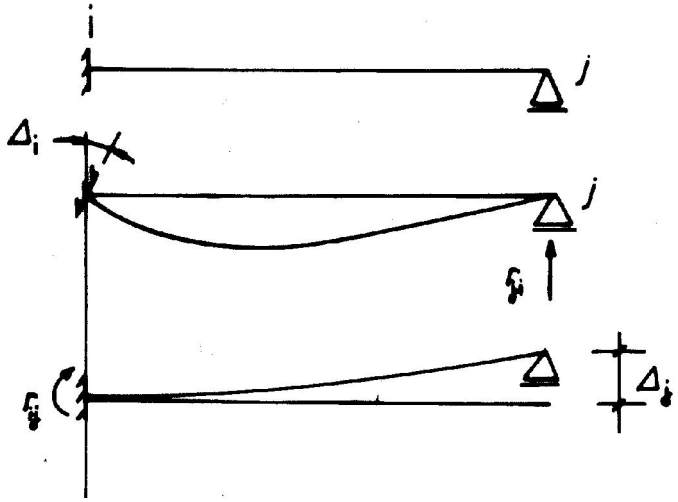


Fig.8.9 Exemplu reciprocitate reacţiuni unitare

Se încarcă structura cu o deplasare Δ_i, după direcţia legăturii i, iar apoi cu o deplasare Δ_j, după direcţia legăturii j (fig.8.9).

Dacă se evidenţiază distinct acţiunile şi reacţiunile se poate scrie:

$$(8.33)\quad \sum P_j \cdot \Delta_{ji} + \sum R_j \cdot \Delta_{ji} = \sum P_i \Delta_{ij} + \sum R_i \Delta_{ij}$$

Dacă se aplică relaţia 8.33, rezultă:

$$(8.34)\quad \Delta_i \cdot R_{ij} = \Delta_j \cdot R_{ji}$$

Considerăm că deplasările impuse sînt egale cu unitatea, adică $\Delta_i = \Delta_j = 1$, şi notăm cu r reacţiunile produse ca urmare a încărcării cu acste deplasări. În acest caz se obţine:

$$(8.35)\quad 1 \cdot r_{ij} = 1 \cdot r_{ji} \text{ sau } r_{ij} = r_{ji}$$

Relaţia (8.35) arată că: reacţiunea din legătura I , datorită încărcării cu o deplasare egală cu unitatea după direcţia legăturii j, este egală cu reacţiunea din legătura j, datorită încărcării cu o deplasare egală cu unitatea după direcţia legăturii i.

Reciprocitatea reacţiunilor unitare se utilizează la rezolvarea structurilor prin metoda deplasărilor.

8.9.4 Calculul deplasărilor punctuale ale structurilor elastice. Relaţia Maxwell-Mohr

Se consideră o structură cu două situaţii de încărcare: situaţia “i” cu sistemul de forţe “Pi” şi eforturile aferente N_i, T_i, Mi şi situaţia “j” cu sistemul de forţe “ P_j şi cu eforturile N_j, T_j, M_j.

Din relaţia (8.18) în care se prezintă expresia lucrului mecanic total în cazul în care forţele şi eforturile din situaţia de încărcare i parcurg deplasările şi deformaţiile produse de situaţia de încărcare j, această expresie devine:

$$(8.36)\ \sum P_i \Delta_{ij} = \int \frac{N_i N_j}{EA} dx + \int \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int \frac{\alpha T_i T_j}{GA} dx$$

- Δ_{ij} reprezintă deplasarea în secţiunea i produsă de forţele aplicate în j.

Expresia (8.36) se poate utiliza în calculul deplasărilor secţiunilor –translaţii sau rotiri- dacă se face următoarea particularizare:

-se presupune că sistemul de forţe i este format dintr-o singură forţă şi aceea egală cu unitatea, $P_I=1$

-forţa $P_i=1$ acţionează pe direcţia deplasării căutate;

-sub acţiunea forţei Pi=1 în structură apar eforturile n_i, t_i, şi m_i. Aceste eforturi se numesc eforturi unitare, în sensul că sînt produse de o forţă egală cu unitatea;

-sistemul de forţe P_j reprezintă forţele reale ce acţionează asupra structurii.

În această situaţie relaţia (8.36) devine:

$$(8.37)\ 1 \cdot \Delta_{ij} = \int \frac{n_i N_j}{EA} dx + \int \frac{m_i M_j}{EI} dx + \int \frac{\alpha t_i T_j}{GA} dx$$

ceea ce constituie relaţia Maxwell-Mohr pentru calculul deplasărilor secţiunilor structurilor static determinate şi static nedeterminate supuse acţiunii forţelor.

Deoarece sistemul de forţe P_j este tocmai sistemul real de forţe pentru care se doreşte calculul deplasării unei secţiuni, în practică se renunţă la indicele j astfel încît expresia deplasării se mai poate scrie:

$$(8.38)\ \Delta_i = \int \frac{n_i N}{EA} dx + \int \frac{m_i M}{EI} dx + \int \frac{\alpha t i T}{GA} dx$$

Deplasarea Δi este o deplasare generalizată, în sensul că ea poate fi translaţia unei secţiuni după o direcţie oarecare, rotirea unei secţiuni (rotirea absolută), deplasarea relativă a două secţiuni.

Termenii din dreapta ai relaţiei Maxwell-Mohr au pondere diferită în calculul deplasărilor elastice la diferitele tipuri de elemente sau structuri de rezistenţă. Astfel:

-la elementele şi structurile de rezistenţă la care efectul încovoierii este predominant (grinzi simple, grinzi Gerber, cadre)deplasarea se calculează cu relaţia:

$$(8.39)\ \Delta_i = \int \frac{m_i M}{EI} dx$$

-la grinzile cu zăbrele, în barele cărora apar numai eforturi axiale, deplasarea se calculează cu relaţia:

$$(8.40)\ \Delta_i = \int \frac{n_i N}{EA} dx$$

-în cazul arcelor, la care efectul predominant este compresiunea excentrică (încovoiere cu forţă axială), deplasarea se calculează cu relaţia:

$$(8.41)\ \Delta_i = \int \frac{n_i N}{EA} dx + \int \frac{m_i M}{EI} dx$$

În cele ce urmează se prezintă cazurile tip pentru încărcarea unitară, necesară calculului deplasărilor elastice:

-grinzi simple:

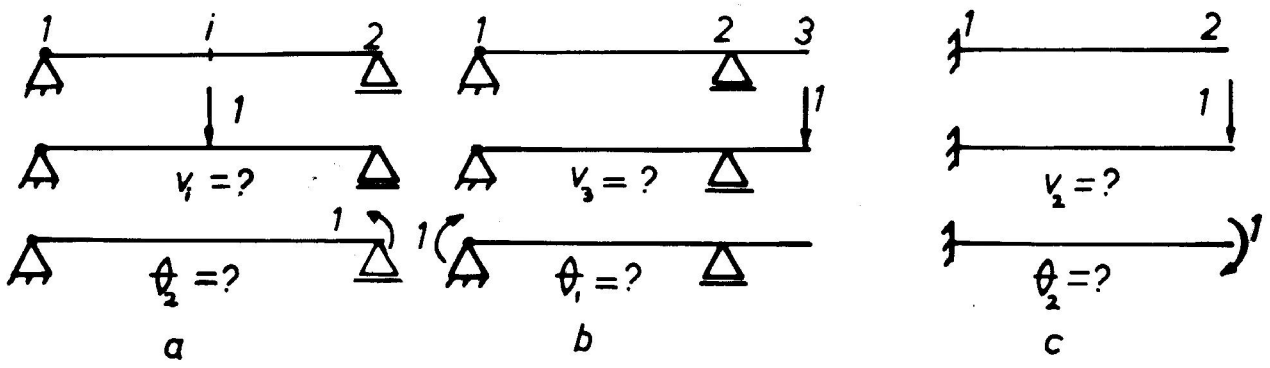


Fig.8.10 Grinzi simple

-grinzi Gerber:

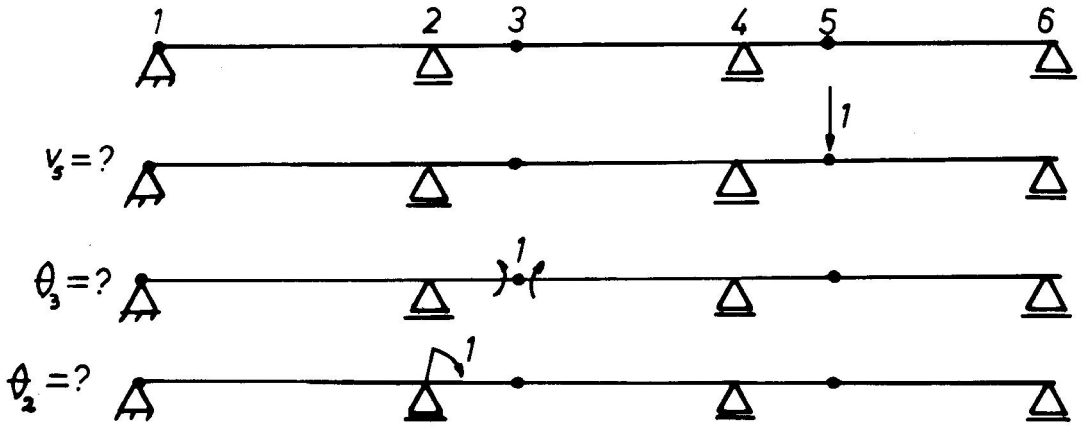


Fig.8.11 Grinzi Gerber

-cadre static determinate

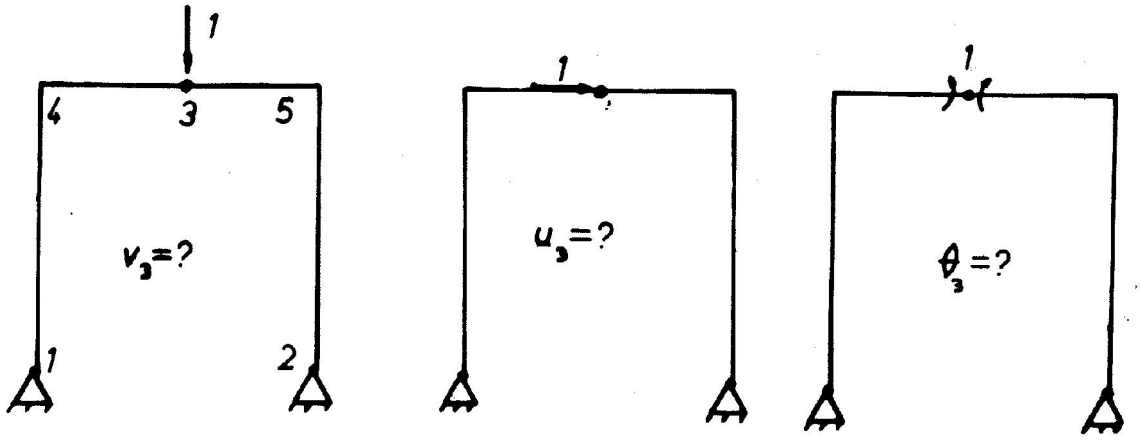


Fig.8.12 Cadre static determinate

-grinzi cu zăbrele

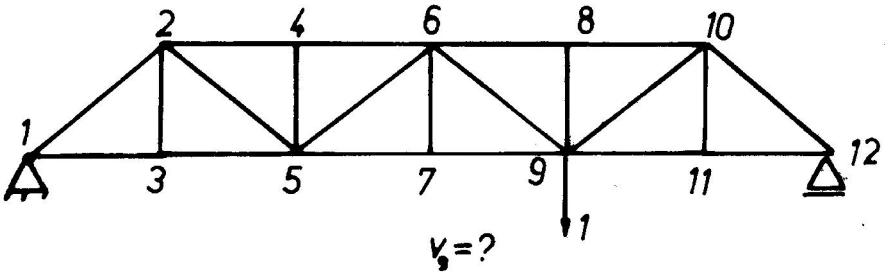


Fig.8.13 Grinzi cu zăbrele

În cazul arcelor încărcarea unitară se aplică la fel ca la cadre. Încărcarea unitară pentru calculul unei deplasări este aceeaşi indiferent de încărcarea reală ce se aplică structurii.

8.10 Regula de integrare Vereşceaghin

Calculul deplasărilor secţiunilor prin rezolvarea directă a integralelor din expresia Maxwell-Mohr este greoi, în special pentru calculul efectului momentelor încovoietoare.
Pentru elementele şi structurile de rezistenţă formate din bare avînd aria şi momentul de inerţie al secţiunii transversale constante s-a putut da o regulă practică de rezolvare a integralelor, denumită regula lui Vereşceaghin.

La stabilirea acestei reguli s-a pornit de la constatarea că diagramele de moment încovoietor obţinut din încărcarea cu forţa unitate, P_I=1 au totdeauna variaţie liniară în lungul barelor drepte, deoarece această încărcare este încărcare concentrată. În schimb, diagrama de moment încovoietor M, produsă de forţele reale poate prezenta zone cu variaţie liniară cît şi zone cu variaţie neliniară (curbe de gradul II sau III).

Fie un tronson dintr-o bară, avînd modulul de elasticitate E şi momentul de inerţie I_0 pe care diagrama M are o variaţie curbilinie oarecare şi diagrama m_I are o varaţie liniară. Se urmăreşte să se calculeze integrala următoare:

$$\int \frac{m_i M}{EI} dx$$

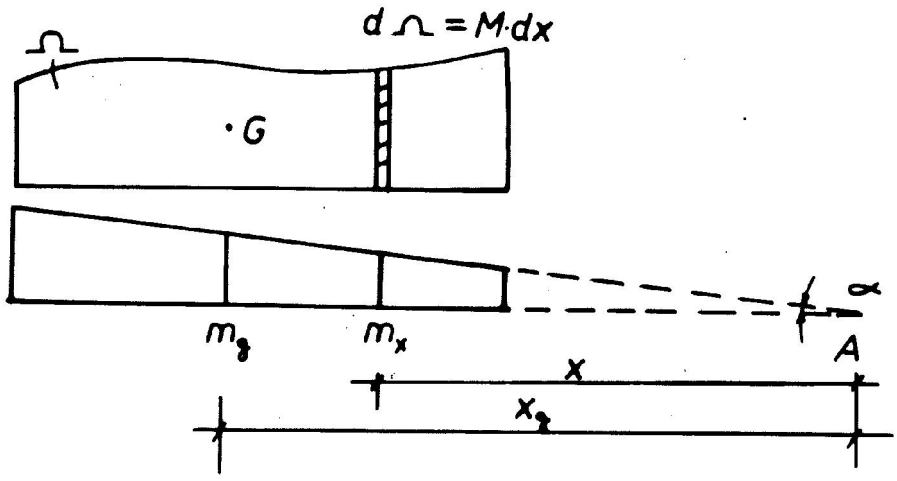


Fig.8.14 Regula de integrare Vereşceaghin

Pentru aceasta se notează suprafaţa elementară din diagrama M cu dΩ=Mdx, iar ordonata corespunzătoare din diagrama unitară cu $m_x = xtg\alpha$. Cu aceste elemente se obţine:

$$(8.42)\ \mathrm{K}\int \frac{m_i M}{EI}dx = \frac{1}{EI}\int_\Omega x\cdot tg\alpha \cdot\cdot d\Omega = \frac{tg\alpha}{EI}\int_\Omega x d\Omega$$

Deoarece $\int_\Omega x d\Omega$ reprezintă momentul static al suprafeţei diagramei M în raport cu o axă ce trece prin punctul A rezultă:

$$(8.43)\ \mathrm{K}\int_\Omega x dA = x_g \Omega$$

Observînd că $x_g tg\alpha = m_g$ se obţine expresia căutată:

$$(8.44)\ \mathrm{K}\int \frac{m_i M}{EI}dx = \frac{\Omega m_g}{EI}$$

care se interpretează astfel: "rezultatul integrării a două diagrame, dintre care cel puţin una cu variaţie liniară, este egal cu produsul dintre suprafaţa diagramei cu variaţie neliniară şi ordonata corespunzătoare centrului său de greutate, luată din diagrama cu variaţie liniară, împărţit la EI."

De fapt diagramele compuse se pot descompune în diagrame simple, aşa cum se exemplifică în cele ce urmează:

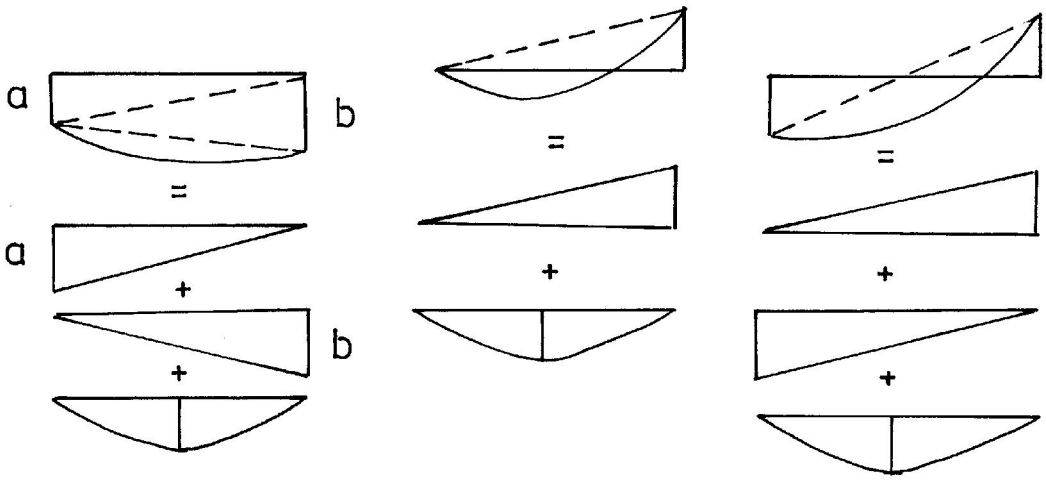


Fig.8.15 Descompunerea diagramelor compuse în diagrame simple

8.11 Deplasări elastice

-Grinzi drepte

Exemplul 1: Se consideră grinda metalică din figura 8.16, şi se cere să se calculeze deplasarea pe verticală a punctului de aplicaţie al forţei: v_3 . Se cunosc E=2,1x10^6 daN/m^2, I=15000cm^4,l=5m

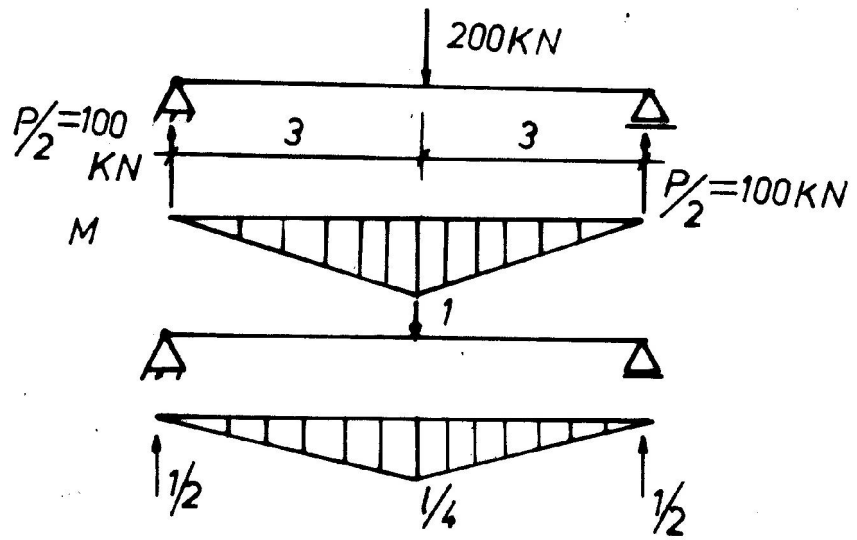


Fig.8.16 Calculul deplasării elastice pentru o grindă simplă rezemată încărcată cu o forţă concentrată

Se determină reacţiunile şi se trasează diagrama de momente încovoietoare, M, produse de forţa P.

Pentru calculul deplasării v_3 se aplică pe grindă în punctul 3 o forţă verticală egală cu unitatea şi se calculează reacţiunile şi se trasează diagrama unitară de momente încovoietoare notată m_v.

Calculul deplasării prin integrare directă

Deplasarea v_3 se calculează cu relaţia: $v_3 = \int \frac{m_v M}{EI} dx$. Se constată că diagramele M şi m_v sînt simetrice în raport cu mijlocul deschiderii, deci se va efectua integrarea pe jumătate din deschidere, iar rezultatul se multiplică cu 2. Momentele încovoietoare M şi m_v în secţiunea curentă, au expresiile:

$$M_x = \frac{Px}{2}, \text{K } m_x = \frac{x}{2}$$

Cu aceste expresii integrala devine:

$$(8.45)\,\text{K}\, v_3 = \frac{2}{EI}\int_0^{l/2} \frac{x}{2}\cdot\frac{Px}{2}dx = \frac{P}{2EI}\frac{x^3}{3}\Bigg|\frac{l/2}{0} = \frac{Pl^3}{48EI}$$

Se constată că s-a obţinut acelaşi rezultat.

Cu datele numerice propuse se obţine valoarea deplasării (se lucrează în daN şi cm):

$$\text{v}_3 = \frac{\text{Pl}^3}{48\text{EI}} = \frac{200\cdot 100\cdot 500^3}{48\cdot 2{,}1\cdot 10^6\cdot 15000} = 1{,}65\text{cm}$$

Se observă că deplasarea este mică, în comparaţie cu lungimea grinzii.

Deoarece în ambele diagrame M şi m_v fibra întinsă prin încovoiere este aceeaşi, semnul integralei este plus. Dacă fibra întinsă ar fi diferită în cele două diagrame semnul este minus.

Deplasarea v_3 a rezultat cu semnul plus. Aceasta înseamnă că deplasarea v_3 se produce cu sensul de acţiune al forţei unitate. Dacă semnul ar fi minus, înseamnă că deplasarea se producea în sens invers sensului de acţiune al forţei unitate.

Exemplul 2: Pentru grinda Gerber din fig.8.17 să se traseze diagramele de forţă tăietoare şi de moment încovoietor şi să se calculeze deplasarea pe verticală v_3 şi deplasarea pe verticală v_5, considerînd $\text{EI} = 18000\text{KNm}^2$

Grinda Gerber se împarte în grindă principală şi grindă secundară, astfel grinda 1-3 este grindă principală iar grinda 3-5 este grindă secundară.

Calcul reacţiuni pentru grinda secundară 3-4:

$$\left(\sum M\right)_4 = 0 \rightarrow V_3 \cdot 10 - 20 \cdot 10 \cdot 5 + 20 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \rightarrow V_3 = 96KN$$

$$\left(\sum M\right)_3 = 0 \rightarrow 20 \cdot 12 \cdot 6 - V_4 \cdot 10 = 0 \rightarrow V_4 = 144KN$$

Calcul reacţiuni pentru grinda principală 1-2:

$$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow 96 \cdot 10 - V_2 \cdot 8 = 0 \rightarrow V_2 = 120KN$$

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow -V_1 \cdot 8 + 96 \cdot 2 = 0 \rightarrow V_1 = 24KN$$

Relaţia Maxwell Mohr pentru calculul deplasării v_3 are forma: $v_3 = \int \frac{M \cdot m_{v_3}}{EI} dx$

Deplasarea v_3 se obţine integrînd diagrama de momente M cu diagrama m_{v_3}

$$v_3 = \frac{1}{2EI}\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 192 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 192 = \frac{1}{EI}(512 + 128) = \frac{1}{EI}640 \rightarrow \frac{640}{18000} = 3,5 \cdot 10^{-2} = 3,5cm$$

Deplasarea v_5 se obţine integrînd diagrama de momente M cu diagrama m_{v_5} :

$$v_5 = \int \frac{M \cdot m_{v_5}}{EI} dx = -\frac{1}{2EI}\frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 192 - \frac{1}{2EI}\frac{1}{2} \cdot 0,4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 192 +$$

$$\frac{1}{4EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 40 - \frac{1}{4EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 10^2}{8} \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2EI}\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 40 - \frac{1}{2EI}\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 +$$

$$\frac{1}{2EI}\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 40 - \frac{1}{2EI}\frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 =$$

$$\frac{1}{EI}(-102,4 - 25,6 + 66,66 - 416,6 + 26,66 - 6,66) = -\frac{458}{EI}$$

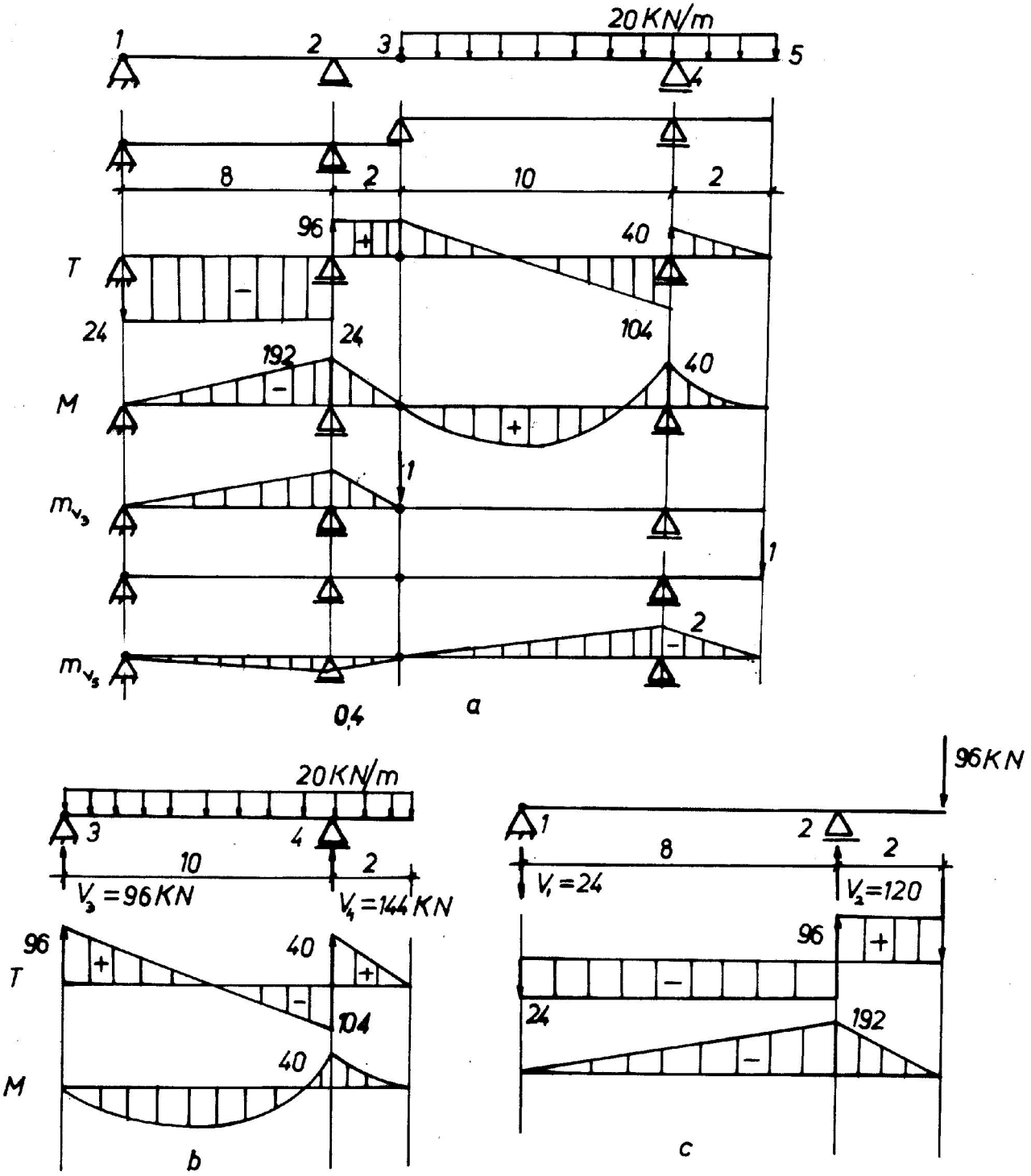


Fig.8.17 Calculul deplasării pe verticală v_3 şi a deplasării v_5;
a)diagrame T,M pentru grinda Gerber,diagrame unitare din încărcarea cu forţa unitate pe direcţia deplasărilor căutate

Exemplul 3: Să se traseze diagramele de forţă tăietoare şi de moment încovoietor şi să se calculeze deplasarea la grinda Gerber din figura 8.18.

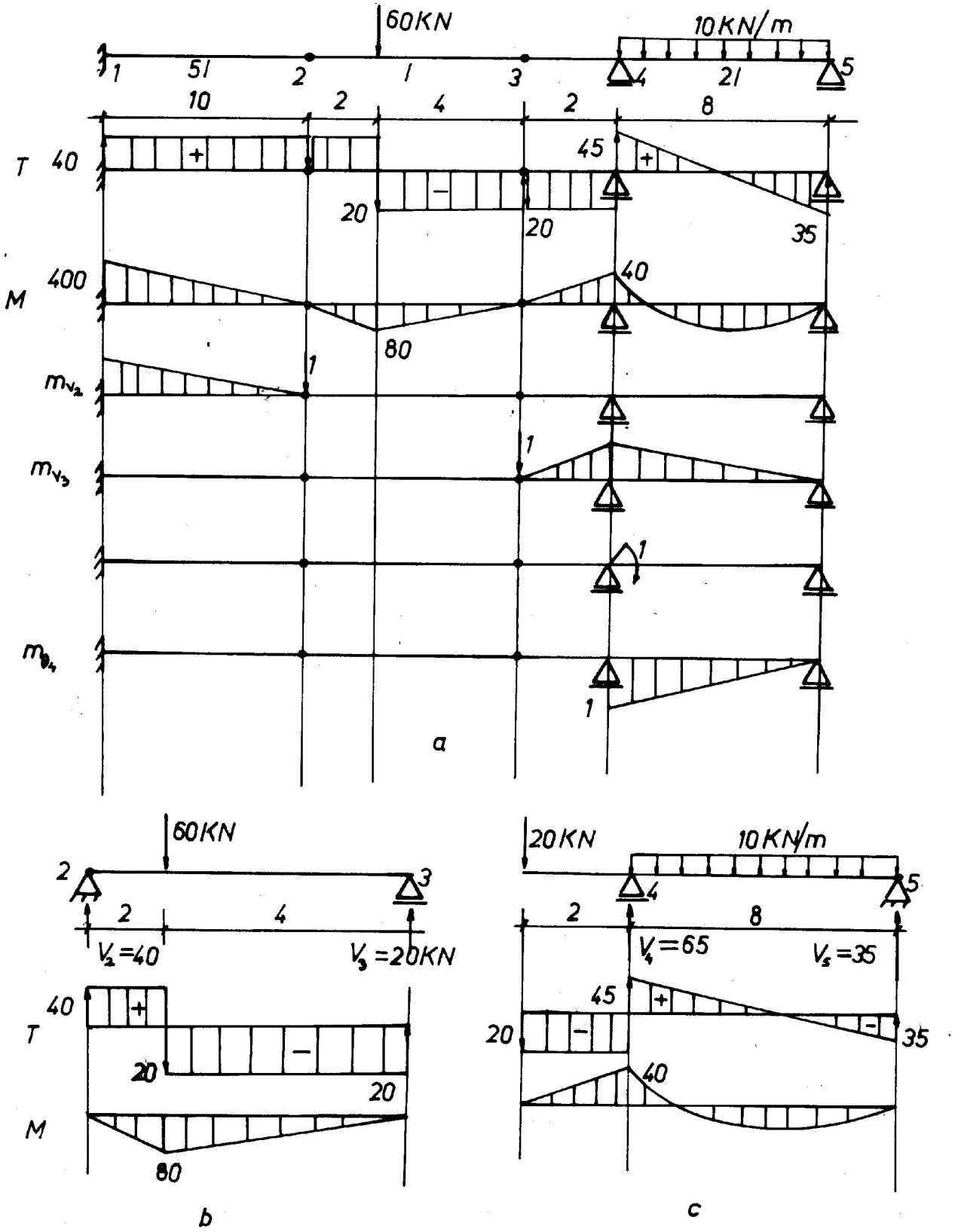


Fig.8.18 Calculul deplasării v_2, v_3 şi rotaţiei θ_4.
a) diagrame de forţă tăietoare, moment, diagrame unitare de moment din încarcarea cu forţă unitară pe direcţia deplasării căutate; b,c)rezolvare grindă 2-3 şi 4-5

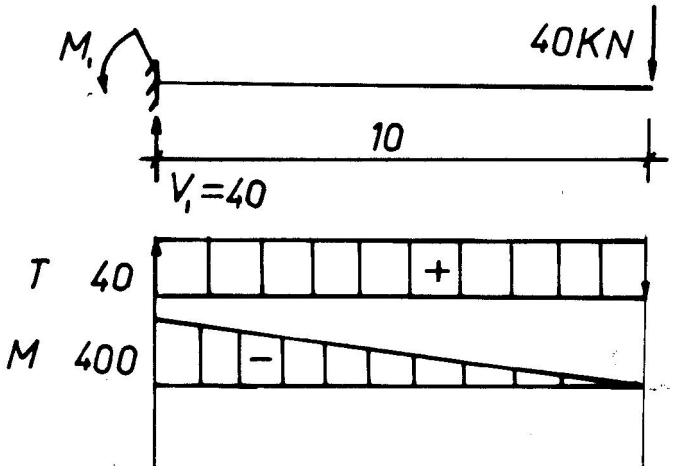


Fig. 8.19 Diagrame T şi M pentru grinda principală 1-2

Calcul reacţiuni pentru grinda 2-3:

$$\left(\sum M\right)_3 = 0 \rightarrow V_2 \cdot 6 - 60 \cdot 4 = 0 \rightarrow V_2 = \frac{60 \cdot 4}{6} = 40KN$$

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow 60 \cdot 2 - V_3 \cdot 6 = 0 \rightarrow V_3 = 20KN$$

Calcul reacţiuni pentru grinda 4-5:

$$\left(\sum M\right)_4 = 0 \rightarrow -20 \cdot 2 + 10 \cdot 8 \cdot 4 - V_5 \cdot 8 = 0 \rightarrow V_5 = 35KN$$

$$\left(\sum M\right)_5 = 0 \rightarrow -20 \cdot 10 + V_4 \cdot 8 - 10 \cdot 8 \cdot 4 = 0 \rightarrow V_4 = 65KN$$

Calcul deplasări elastice:

$$v_2 = \int \frac{M \cdot m_{v_2}}{EI} = \frac{1}{5EI}\frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 = \frac{2666,6}{EI} = 0,111m$$

$$v_3 = \frac{1}{2EI}\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2EI}\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{10 \cdot 8^2}{8} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 =$$

$$\frac{1}{EI}(26,66 + 106,66 - 320) = -\frac{186,6}{EI} = -0,77 \cdot 10^{-2} m$$

$$\theta_4 = -\frac{1}{2EI}\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 8^2}{8} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{EI}(-53,33 + 106,66) = \frac{53,33}{EI}$$

-Cadre

Exemplul 4:

Să se calculeze deplasarea v_4 a cadrului static determinat din figura 8.20 considerînd produsul $EI = 24000KNm^2$

Deplasarea v_4 se obţine integrînd diagrama de momente M, obţinută din încărcarea cu sarcini exterioare, cu diagrama m_{v_4} , obţinută din încărcarea cadrului static determinat cu o forţă unitate pe direcţia deplasării căutate.

Calcul reacţiuni din încărcarea cu sarcini exterioare:

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 12 - 15 \cdot 12 \cdot 6 = 0 \rightarrow V_1 = 90KN$$

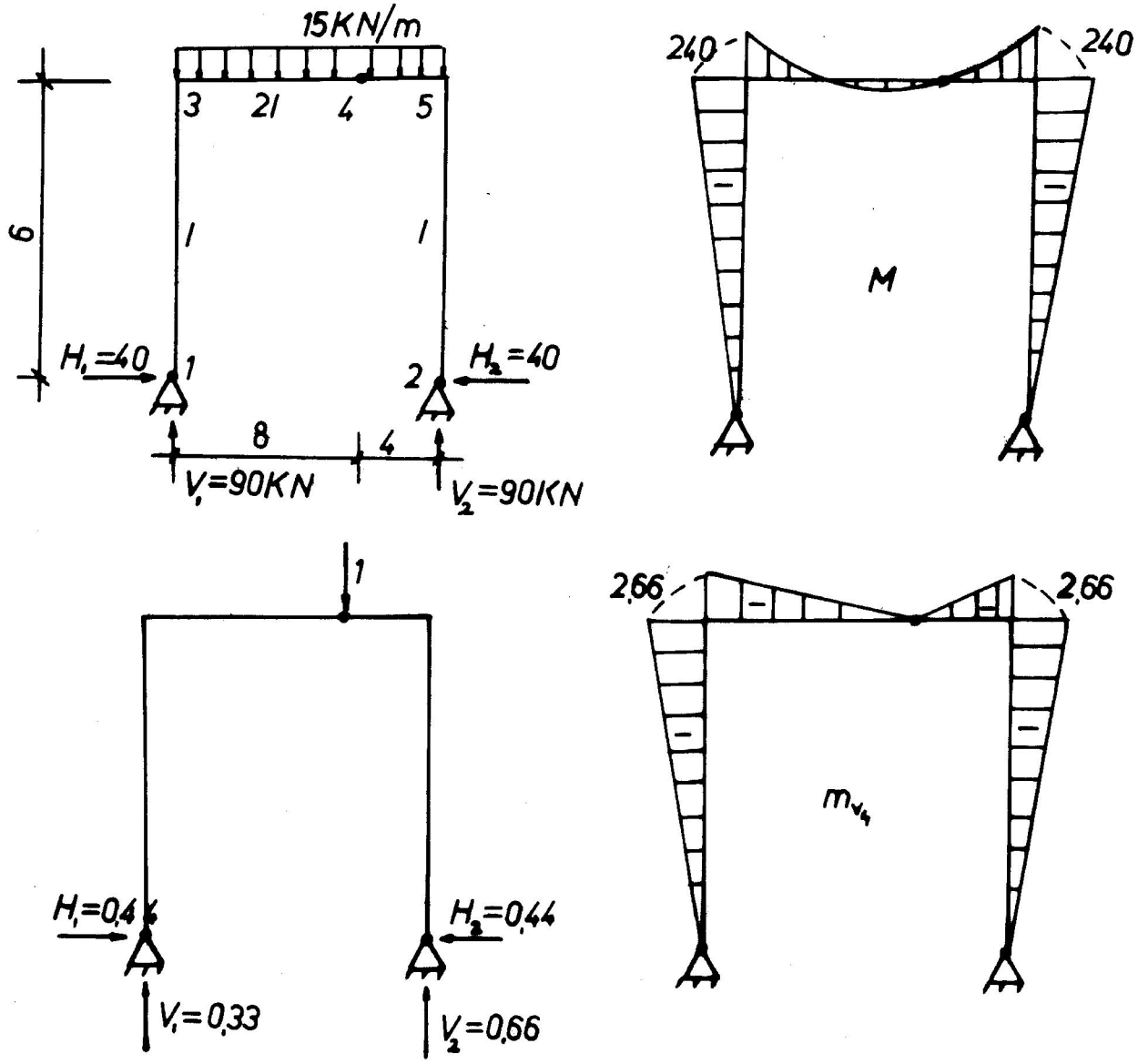


Fig.8.20 Diagrame de moment din încărcarea cu sarcini exterioare şi din încărcarea cu forţa unitate pe direcţia deplasării căutate

$$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow 15 \cdot 12 \cdot 6 - V_2 \cdot 12 = 0 \rightarrow V_2 = 90KN$$

$$\left(\sum M\right)_4^{st} = 0 \rightarrow 90 \cdot 8 - H_1 \cdot 6 - 15 \cdot 8 \cdot 4 = 0 \rightarrow H_1 = 40$$

$$\left(\sum M\right)_4^{dr} = 0 \rightarrow 15 \cdot 4 \cdot 2 + H_2 \cdot 6 - 90 \cdot 4 = 0 \rightarrow H_2 = 40$$

Calcul reacţiuni pentru cadrul încărcat cu forţa unitate:

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 12 - 1 \cdot 4 = 0 \rightarrow V_1 = 0{,}333$$

$$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow 1 \cdot 8 - V_2 \cdot 12 = 0 \rightarrow V_2 = 0{,}666$$

$$\left(\sum M\right)_4^{st} = 0 \rightarrow 0{,}333 \cdot 8 - H_1 \cdot 6 = 0 \rightarrow H_1 = 0{,}444$$

Calcul deplasare v_4:

$$v_4 = \int \frac{M \cdot m_{v_4}}{EI} dx = \frac{1}{EI}\frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2{,}66 + \frac{1}{2EI}\frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2{,}66 - \frac{1}{2EI}\frac{2}{3} \cdot \frac{15 \cdot 8^2}{8} \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2{,}66 +$$

$$+\frac{1}{2EI}\frac{1}{2}\cdot 240\cdot 4\cdot\frac{2}{3}\cdot 2{,}66+\frac{1}{2EI}\frac{1}{2}\cdot 240\cdot 6\cdot\frac{2}{3}\cdot 2{,}66=$$

$$=\frac{1}{EI}(1276{,}8+851{,}2-425{,}6+425{,}6+638{,}4)=\frac{2766{,}4}{EI}=1{,}15\cdot 10^{-1}\,\mathrm{m}$$

Exemplul 5:
Să se calculeze deplasarea relativă în secţiunea 3 a cadrului static determinat din figura 8.21, considerînd $EI = 18000\,\mathrm{KNm}^2$

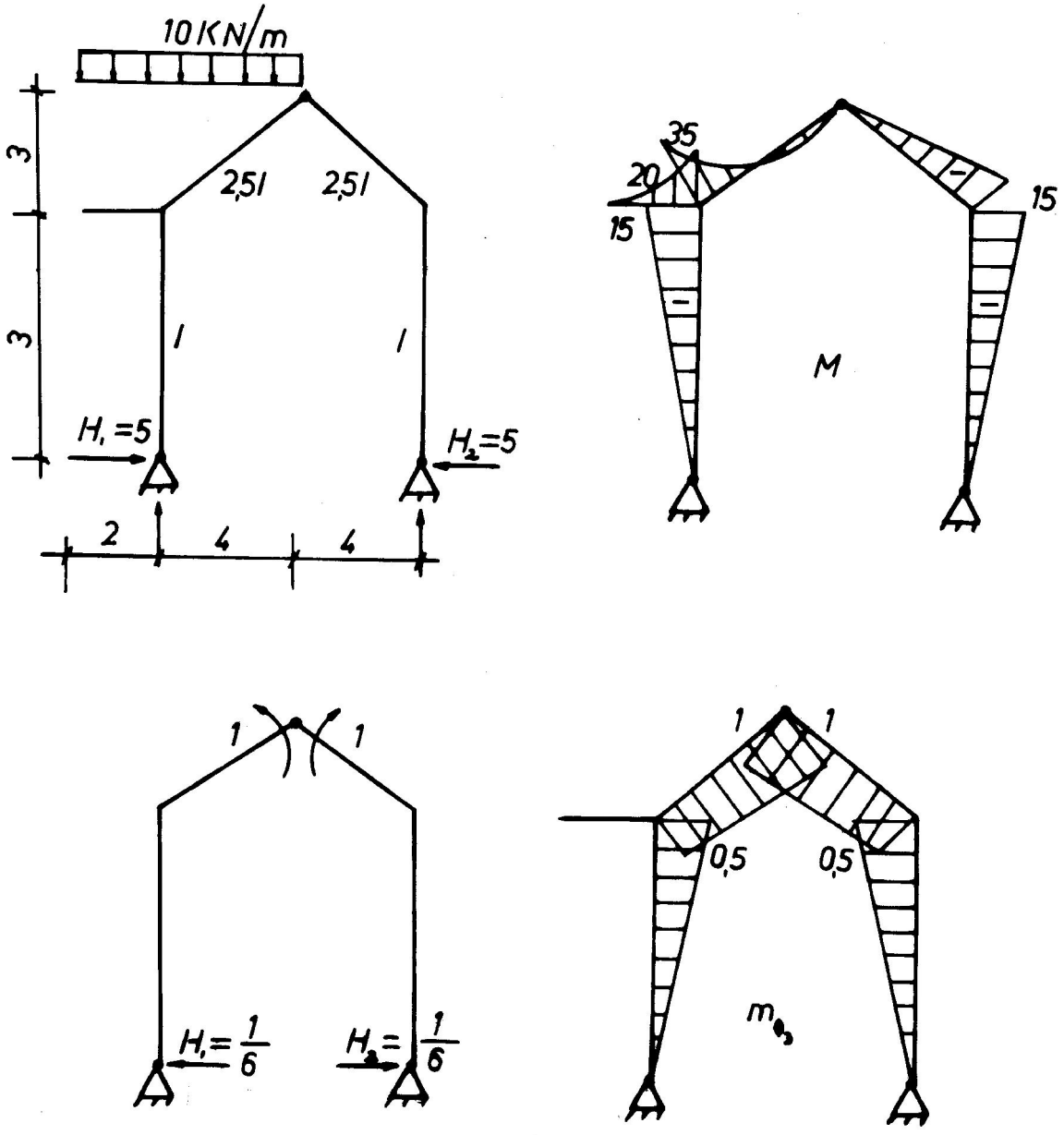


Fig.8.21 Diagramă de moment din sarcini exterioare şi din încărcarea cu o pereche de momente unitare în secţiunea 3

Calcul reacţiuni cadru static determinat din încărcarea cu forţe exterioare:
$\left(\sum \mathrm{M}\right)_1 = 0 \rightarrow -10\cdot 2\cdot 1+10\cdot 4\cdot 2-\mathrm{V}_2\cdot 8=0\rightarrow \mathrm{V}_2=7{,}5\mathrm{KN}$

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 8 - 10 \cdot 6 \cdot 7 = 0 \rightarrow V_1 = 52{,}5KN$$

$$\left(\sum M\right)_3^{dr} = 0 \rightarrow H_2 \cdot 6 - 7{,}5 \cdot 4 = 0 \rightarrow H_2 = 5KN$$

$$\left(\sum M\right)_3^{st} = 0 \rightarrow 52{,}5 \cdot 4 - H_1 \cdot 6 - 10 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \rightarrow H_1 = 5$$

Calcul reacţiuni pentru cadrul static determinat încărcat cu perechea de momente unitare:

$$\left(\sum M\right)_3^{dr} = 0 \rightarrow H_2 \cdot 6 - 7{,}5 \cdot 4 = 0 \rightarrow H_2 = 5KN$$

$$\left(\sum M\right)_3^{st} = 0 \rightarrow H_1 \cdot 6 - 1 = 0 \rightarrow H_1 = \frac{1}{}$$

Calcul rotaţie relativă a secţiunii 3:

$$\theta_3^{rel} = \int \frac{M \cdot m_{\theta_3}}{EI} dx = -\frac{1}{EI}\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}5 - \frac{1}{2{,}5EI}\frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 5\left(\frac{2}{3} \cdot 0{,}5 + \frac{1}{3} \cdot 1\right) +$$

$$+ \frac{1}{2{,}5EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 0{,}8 \cdot 5^2}{8} \cdot 5\left(\frac{1}{2} \cdot 0{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 1\right) - \frac{1}{2{,}5EI}\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 5\left(\frac{2}{3} \cdot 0{,}5 + \frac{1}{3} \cdot 1\right) - \frac{1}{EI}\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}5 =$$

$$\frac{1}{EI}\left(-7{,}5 - 23{,}33 + 25 - 10 - 7{,}5\right) = -\frac{23{,}33}{EI} = -1{,}29 \cdot 10^{-3} \text{rad}$$

-Cadre simetrice

O structură se consideră simetrică în raport cu o axă, dacă elementele geometrice: lungimile barelor şi caracteristicile geometrice ale secţiunilor transversale A şi I, legăturile interioare şi cele exterioare (reazemele) sînt aceleaşi de o parte şi de alta a axei considerate. În figura 8.22 sînt prezentate cîteva exemple de cadre static determinate simetrice.

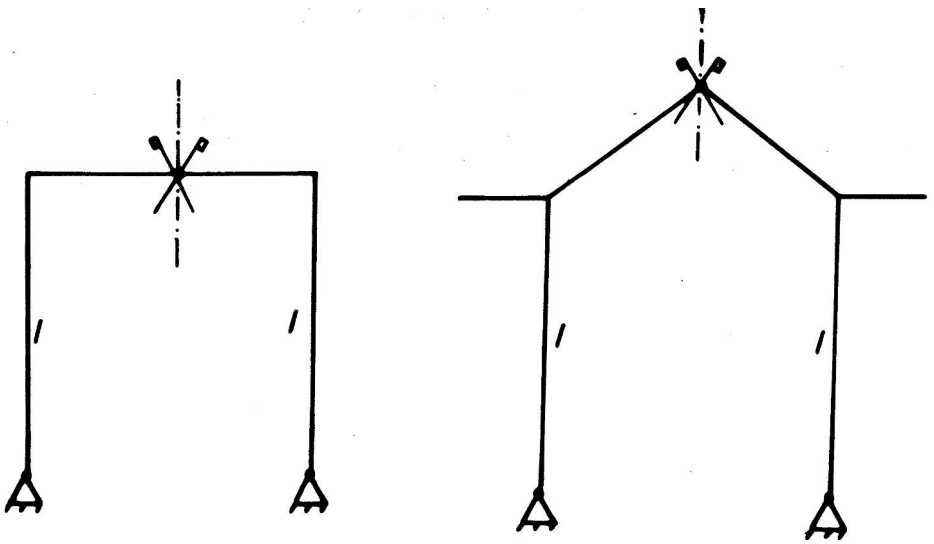


Fig.8.22 Structuri simetrice

În calculul acestor structuri apar unele particularităţi în cazul în care încărcarea este, la rîndul ei, simetrică sau antisimetrică. În cazurile reale încărcările pot fi:

-încărcări oarecare

-încărcări simetrice

-încărcări antisimetrice

Orice încărcare oarecare poate fi decompusă într-o încărcare simetrică şi o încărcare antisimetrică. Se calculează structura separat pentru încărcarea simetrică şi separat pentru încărcarea antisimetrică, şi apoi se suprapun efectele pentru a obţine situaţia corespunzătoare încărcării oarecare. În figura 8.23 sînt prezentate exemple de descompunere a unei încărcări oarecare în încărcare simetrică şi încărcare antisimetrică.

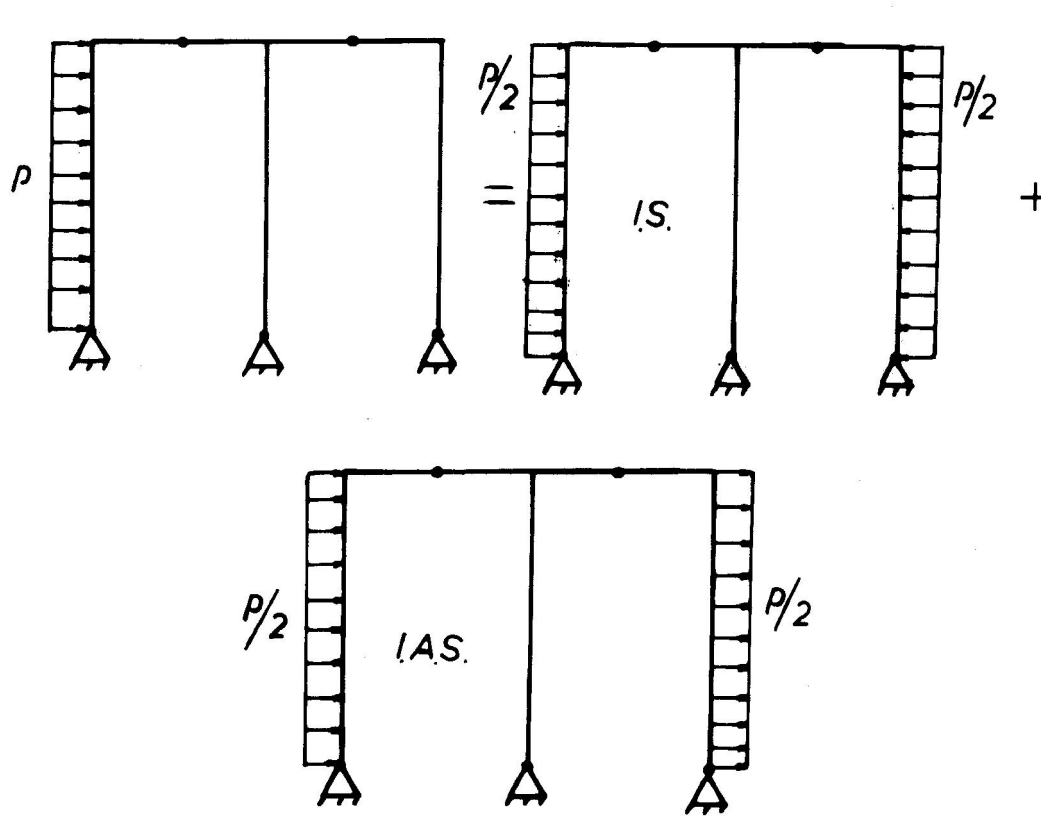


Fig.8.23 Descompunerea unei încărcări

Particularităţile care vor fi consemnate la cadrele static determinate, referitoare la diagramele de eforturi şi forma deformată a structurii, se vor menţiona şi la cadrele static nedeterminate.

În calculul acestor structuri, utilizarea proprietăţilor de simetrie ale structurii şi încărcării conduce la reducerea sensibilă a volumului de calcule.

-Cadre simetrice încărcate simetric

Exemplul 6: Fie cadrul din fig.8.24 încărcat simetric. Se cere să se calculeze deplasările u_3, v_3 considerînd produsul $EI = 24000 KNm^2$.

Calcul reacţiuni încărcare forţe exterioare:

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 8 - 20 \cdot 10 \cdot 5 + 20 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \rightarrow V_1 = 120KN$$

$$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow -20 \cdot 2 \cdot 1 + 20 \cdot 10 \cdot 5 - V_2 \cdot 8 = 0 \rightarrow V_2 = 120KN$$

$$\left(\sum M\right)_3^{st} = 0 \rightarrow 120 \cdot 4 - H_1 \cdot 3{,}2 - 20 \cdot 6 \cdot 3 = 0 \rightarrow H_1 = 37{,}5KN$$

Diagramele N,T,M sînt prezentate în figura 8.19.

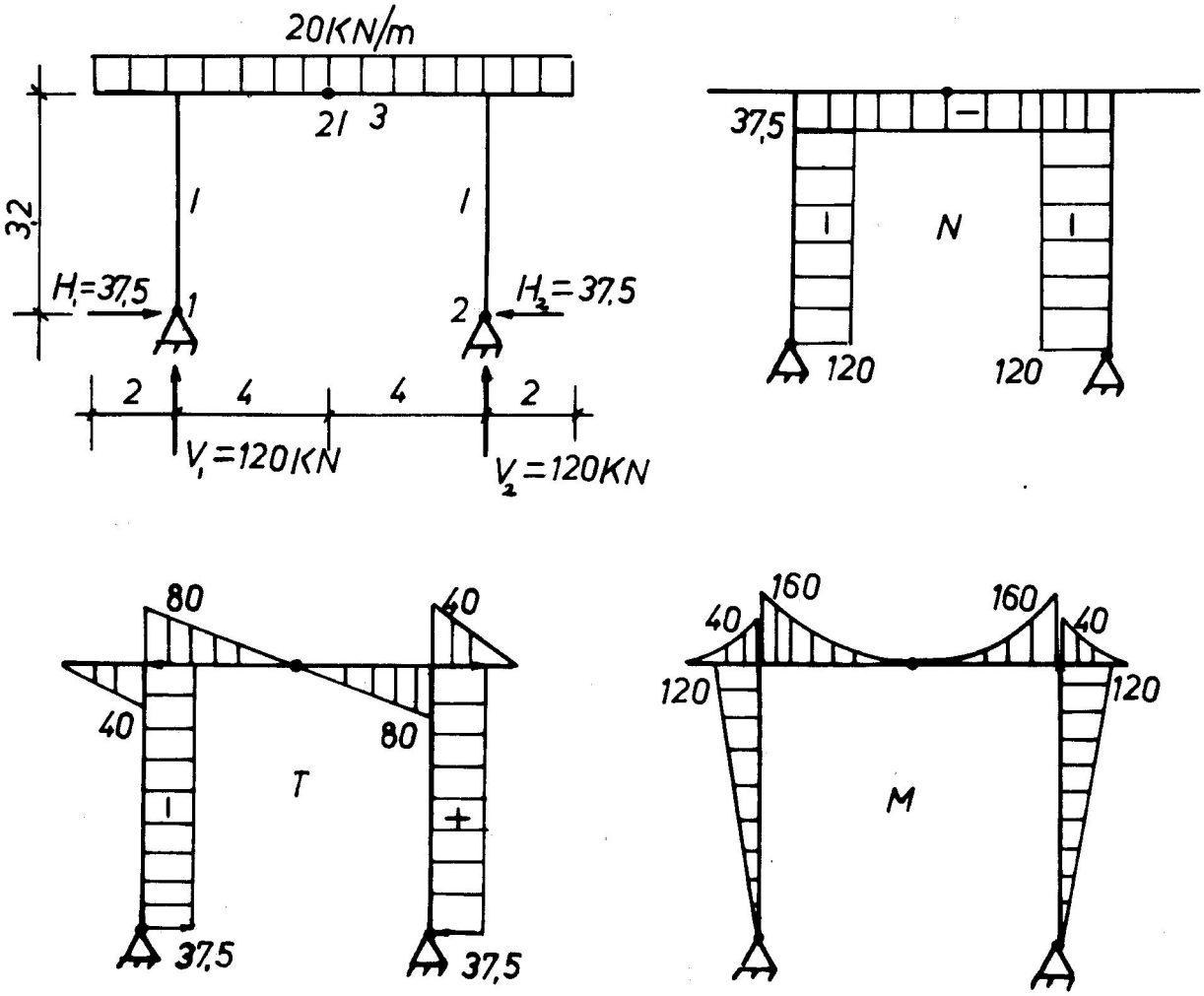


Fig.8.24 Cadru simetric încărcat simetric

Din rezultatele obţinute se desprinde concluzia generală că:

"la structurile simetrice, încărcate simetric, reacţiunile sînt simetrice".

Din analiza diagramelor de eforturi rezultă următoarele concluzii: "la structurile simetrice încărcate simetric diagramele de forţă axială şi de moment încovoietor sînt simetrice, iar diagrama de forţă tăietoare este antisimetrică".

Calculul deplasării pe verticală v_3

Încărcarea unitară pentru calculul deplasării v_3 este o încărcare simetrică şi în consecinţă şi diagrama unitară de moment încovoietor, m_v, este simetrică. De aceea în calculul deplasării se integrează diagramele numai pe jumătate de structură, iar fiecare termen se multiplică cu 2.

Calcul reacţiuni din încărcarea cu forţă unitate:

$$\left(\sum M\right)_3^{st} = 0 \rightarrow 0{,}5 \cdot 4 - H_1 \cdot 3{,}2 = 0 \rightarrow H_1 = 0{,}625$$

Calcul deplasare elastică v_3 :

$$v_3 = \int \frac{M \cdot m_{v_3}}{EI} dx = 2 \cdot \left(\frac{1}{EI} \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 3{,}2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 - \frac{1}{2EI} \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right) =$$

$$= \frac{2}{EI}(256 + 213{,}3 - 53{,}33) = \frac{831{,}9}{EI} = 3{,}46 \cdot 10^{-2}\,\text{m}$$

Calculul deplasării pe orizontală u_3

Forţa egală cu unitatea aplicată pe orizontală în punctul 3 conduce la o diagramă unitară de moment încovoietor m_{u_3} antisimetrică.

Calcul reacţiuni din încărcarea cu forţa unitate:

$$\left(\sum \mathrm{M}\right)_2 = 0 \rightarrow -\mathrm{V}_1 \cdot 8 + 1 \cdot 3{,}2 = 0 \rightarrow \mathrm{V}_1 = \frac{3{,}2}{8} = 0{,}4$$

$$\left(\sum \mathrm{M}\right)_1 = 0 \rightarrow 1 \cdot 3{,}2 - \mathrm{V}_2 \cdot 8 = 0 \rightarrow \mathrm{V}_2 = 0{,}4$$

$$\left(\sum \mathrm{M}\right)_3^{st} = 0 \rightarrow -0{,}4 \cdot 4 + \mathrm{H}_1 \cdot 3{,}2 = 0 \rightarrow \mathrm{H}_1 = 0{,}5$$

Calcul deplasare elastică u_3:

$$\mathrm{u}_3 = \int \frac{\mathrm{M} \cdot \mathrm{m}_{u_3}}{\mathrm{EI}} \mathrm{dx} = -\frac{1}{\mathrm{EI}} \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 3{,}2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1{,}6 - \frac{1}{2\mathrm{EI}} \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1{,}6 +$$

$$\frac{1}{2\mathrm{EI}} \frac{2}{3} \frac{20 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}6 + \frac{1}{\mathrm{EI}} \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 3{,}2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1{,}6 + \frac{1}{2\mathrm{EI}} \frac{1}{2} \cdot 160 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1{,}6 -$$

$$-\frac{1}{2\mathrm{EI}} \frac{2}{3} \cdot \frac{20 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}6 = 0$$

Se observă că în expresia deplasării u_3 termenii sînt doi cîte doi egali şi de semn contrar, deci a rezultat u_3=0.

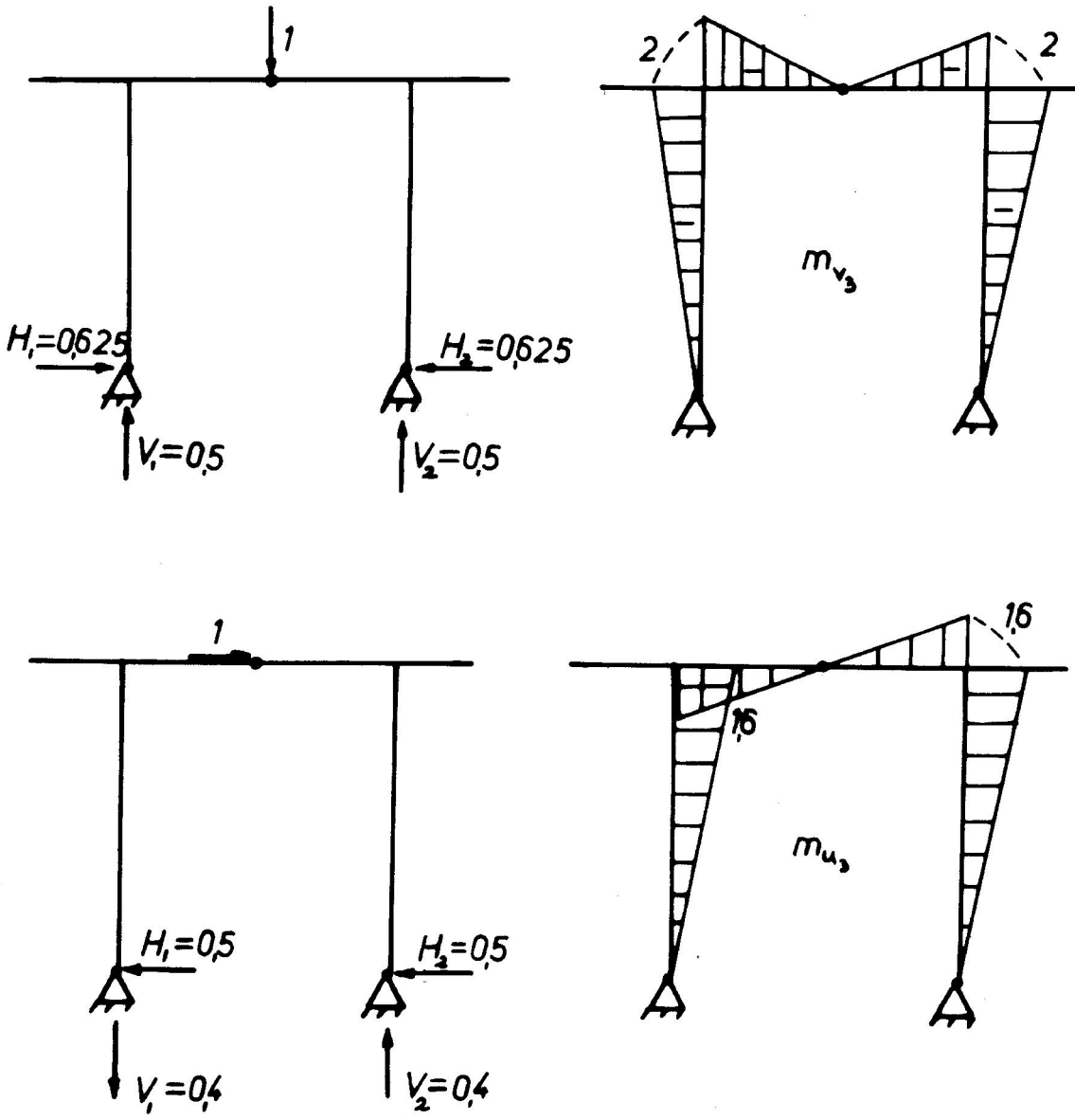


Fig.8.25 Diagrame de moment încovoietor din încărcrea cu forţe unitate pe direcţia deplasării căutate

Din analiza rezultatelor obţinute în calculul deplasărilor se desprind următoarele concluzii:

-rezultatul integrării a două diagrame simetrice este diferit de zero;

-rezultatul integrării unei diagrame simetrice cu o diagramă antisimetrică este egal cu zero.

-deformata unei structuri simetrice, încărcată simetric, este simetrică. Secţiunea de pe axa de simetrie se poate deplasa numai pe direcţia axei de simetrie iar rotirea relativă este o deplasare simetrică.

Cadre simetrice încărcate antisimetric

Exemplul 7: Fie cadrul din figura 8.26 încărcat antisimetric. Se cere să se traseze diagramele de eforturi şi să se calculeze deplasările v_3, u_3 considerînd EI=18000KNm^2.

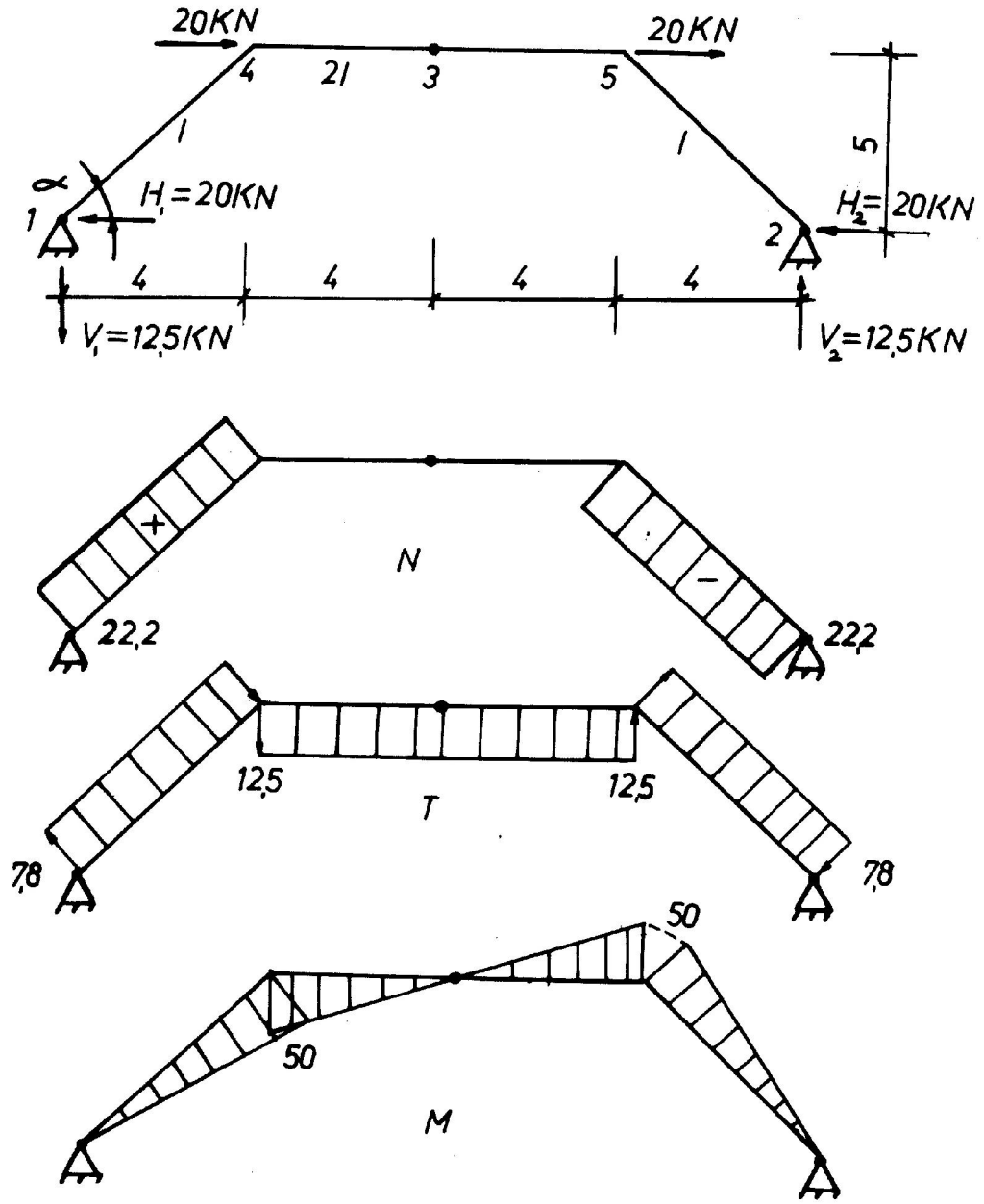


Fig.8.26 Cadru simetric încărcat antisimetric, diagrame de eforturi N,T,M

Calculul reacţiunilor:

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow -V_1 \cdot 16 + 20 \cdot 5 + 20 \cdot 5 = 0 \rightarrow V_1 = 12{,}5\text{KN}$$

$$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow 20 \cdot 5 + 20 \cdot 5 - V_2 \cdot 16 = 0 \rightarrow V_2 = 12{,}5$$

$$\left(\sum M\right)_3^{st} = 0 \rightarrow -12{,}5 \cdot 8 + H_1 \cdot 5 = 0 \rightarrow H_1 = 20\text{KN}$$

$$\left(\sum M\right)_3^{dr} = 0 \rightarrow -12{,}5 \cdot 8 + H_2 \cdot 5 = 0 \rightarrow H_2 = 20\text{KN}$$

Concluzia ce se desprinde din calculul reacţiunilor este că: “ la structurile simetrice, încărcate antisimetric, reacţiunile sînt antisimetrice”.

$\sin\alpha = 0{,}78; \cos\alpha = 0{,}624$

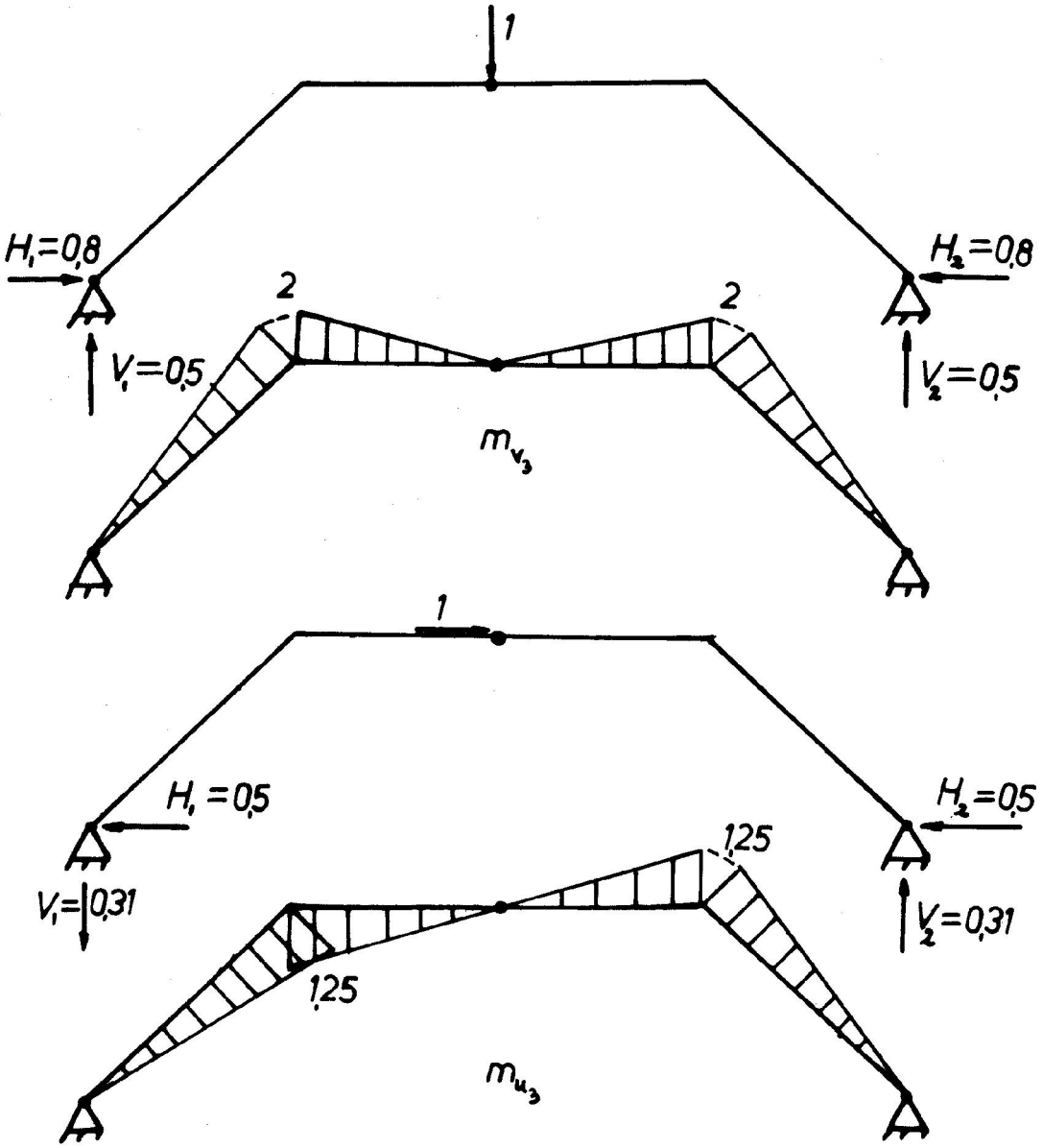


Fig.8.27 Diagrame de moment încovoietor, din încărcarea cu o forţă unitară pe direcţia deplasării căutate

Diagramele de eforturi:

Calculul efortului axial şi al forţei tăietoare pe stîlpul înclinat 1-4:

$N_{14} = 12,5 \cdot 0,78 + 20 \cdot 0,624 = 22,23KN$

$T_{14} = -12,5 \cdot 0,624 + 20 \cdot 0,78 = 7,8$

Din analiza diagramelor de eforturi rezultă următoarele concluzii: "la structurile simetrice încărcate antisimetric, diagramele de forţă axială şi de moment încovoietor sînt antisimetrice, iar diagrama de forţă tăietoare este simetrică"

Calculul deplasării v_3

Forţa egală cu unitatea aplicată pe orizontală în punctul 3 conduce la o diagramă unitară de moment încovoietor m_{v3} simetrică.

$\left(\sum M\right)_3^{st} = 0 \rightarrow 0,5 \cdot 8 - H_1 \cdot 5 = 0 \rightarrow H_1 = 0,8$

$M_4 = 0,5 \cdot 4 - 0,8 \cdot 5 = -2$

$$v_3 = -\frac{1}{EI}\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 6{,}4\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 - \frac{1}{2EI}\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 4\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{1}{EI}\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 6{,}4\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 + \frac{1}{2EI}\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 4\cdot\frac{2}{3}\cdot 2 = 0$$

Calculul deplasării u_3

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow -V_1\cdot 16 + 1\cdot 5 = 0 \rightarrow V_1 = 0{,}312$$

$$\left(\sum M\right)_3^{st} = 0 \rightarrow -0{,}312\cdot 8 + H_1\cdot 5 = 0 \rightarrow H_1 = 0{,}5$$

$$u_3 = \int\frac{M\cdot m_{u_3}}{EI} = 2\left(\frac{1}{EI}\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 6{,}4\cdot\frac{2}{3}\cdot 1{,}25 - \frac{1}{2EI}\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 4\cdot\frac{2}{3}\cdot 1{,}25\right) =$$

$$\frac{2}{EI}(133{,}33 - 41{,}66) = \frac{183{,}3}{EI} = 1{,}01\cdot 10^{-2}\,\text{m}$$

Deoarece diagrama M este o diagramă antisimetrică, rezultatul integrării ei cu diagrama m_{v3} este egal cu zero.

Concluziile desprinse din calculul deplasărilor sînt:

-rezultatul integrării a două diagrame antisimetrice este diferit de zero.

-rezultatul integrării unei diagrame antisimetrice cu o diagramă simetrică este egal cu zero.

-deformata unei structuri simetrice, încărcată antisimetric este antisimetrică. Secţiunea de pe axa de simetrie se poate deplasa numai pe normala la această axă, celelalte două deplasări sînt egale cu zero.

CAP.9 METODA EFORTURILOR

9.1 Gradul de nedeterminare statică

Metoda porneşte de la considerarea legăturilor suplimentare ce există într-o structură static nedeterminată şi îşi propune să determine forţele de legătură corespunzătoare, alegîndu-le pe acestea ca necunoscute ale problemei. Este necesar pe de o parte să se pună în evidenţă forţele de legătură respective, iar pe de altă parte să se asigure desfăşurarea calculului pe un sistem cu rezolvare cunoscută. Se realizează aceste cerinţe considerînd suprimate legăturile suplimentare şi aplicînd forţele de legătură ca acţiuni exterioare asupra sistemului rezultat. Se obţine astfel un sistem echivalent, care ca alcătuire este static determinat, încărcat cu sarcinile date şi cu necunoscutele alese. Acesta este sistemul de bază, căruia i se va impune condiţia să se comporte la fel ca structura reală, deci să aibă aceeaşi poziţie deformată.

Alcătuirea sistemului de bază este o consecinţă a modului cum sînt alese legăturile suplimentare. Considerînd totalitatea legăturilor structurii date, forţele de legătură respective-iniţial necunoscute se pot împărţi în două categorii: un prim grup care cuprinde un număr de necunoscute egal cu numărul ecuaţiilor de echilibru static disponibile şi un al doilea grup, care cuprinde surplusul de necunoscute. Pe baza ecuaţilor de echilibru static se pot totdeauna exprima necunoscutele din primul grup în funcţie de sarcini şi de necunoscutele din al doilea grup. Acestea din urmă capătă astfel caracter de variabile independente din punct de vedere static şi pentru aflarea lor urmează să se folosească ecuaţii suplimentare care derivă din condiţia de compatibilitate.

Oricare dintre necunoscute poate fi plasată în a doua categorie, deci orice forţă de legătură poate fi considerată drept cantitate static nedeterminată, dar numărul celor privite concomitent ca atare trebuie să fie egal cu gradul de nedeterminare.
Înseamnă că pentru o structură dată se pot alege mai multe sisteme de bază.

Numărul forţelor de legătură suplimentare, faţă de numărul minim care asigură invariabilitatea geometrică şi fixarea structurii, reprezintă gradul de nedeterminare statică a structurii. Diferenţa între numărul de necunoscute (reacţiuni şi eforturi) ale structurii şi numărul ecuaţiilor de echilibru static constituie gradul de nedeterminare statică.

După distribuţia legăturilor suplimentare structurile pot fi: nedeterminate exterior, interior sau atît exterior cît şi interior.

Structurile static nedeterminate exterior sînt legate cu mai multe legături decît numărul minim în rezemări. Astfel, structura din fig.9.1a în cele două încastrări are şase legături şi deci are trei legături în plus faţă de cele trei legături necesare pentru a obţine o structură static determinată.

Dacă se înlocuieşte fiecare legătură cu o forţă de legătură rezultă şase forţe de legătură necunoscute. Se pot scrie trei ecuaţii de echilibru static şi structura rămîne de trei ori static nedeterminată exterior. Cadrul din fig.9.1b este de două ori static nedeterminat exterior, iar grinda continuă din fig.9.1c este de două ori static nedeterminată exterior.

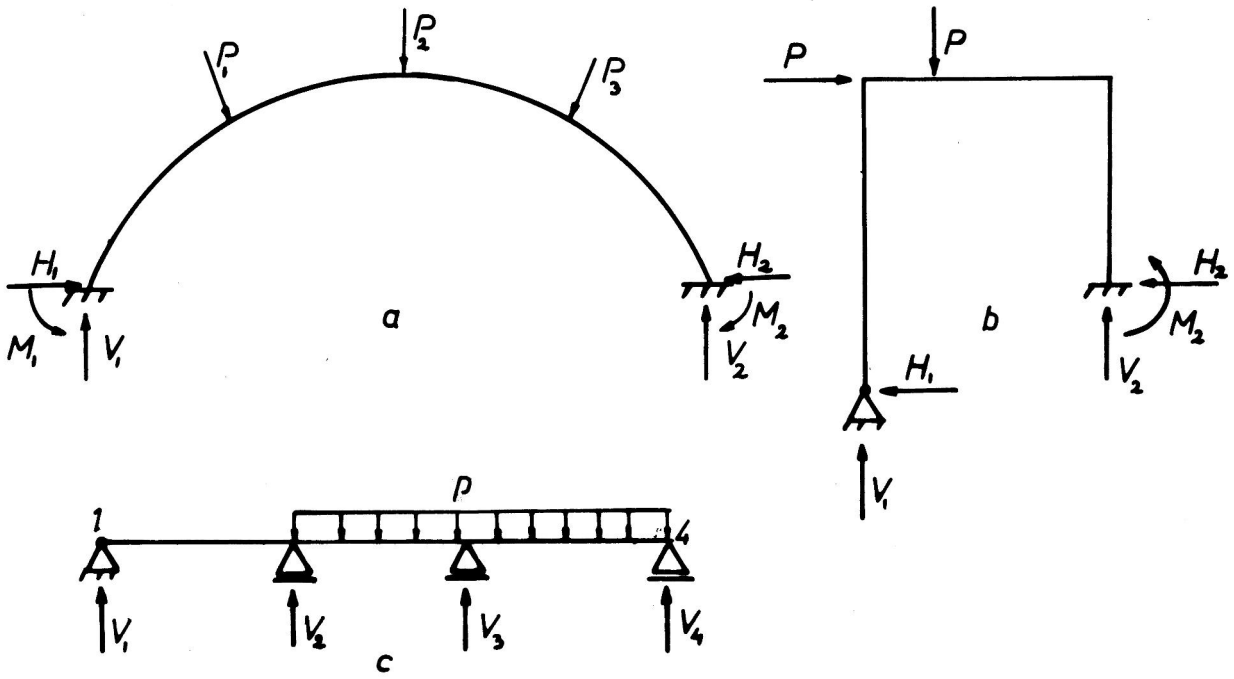


Fig9.1 Tipuri de structuri static nedeterminate

Structurile static nedeterminate interior sînt legate în rezemări cu numărul minim de legături, dar în interior dispun de legături suplimentare. Cadrul din fig.9.2a este static determinat exterior, deoarece reacţiunile V_1,H_1 şi V_6 se pot calcula din ecuaţiile de echilibru static. Cunoscînd reacţiunile se determină eforturile pe barele 1-2 şi 5-6 cu metoda secţiunilor, însă nu se pot calcula eforturile în conturul închis 2-3-4-5-2.

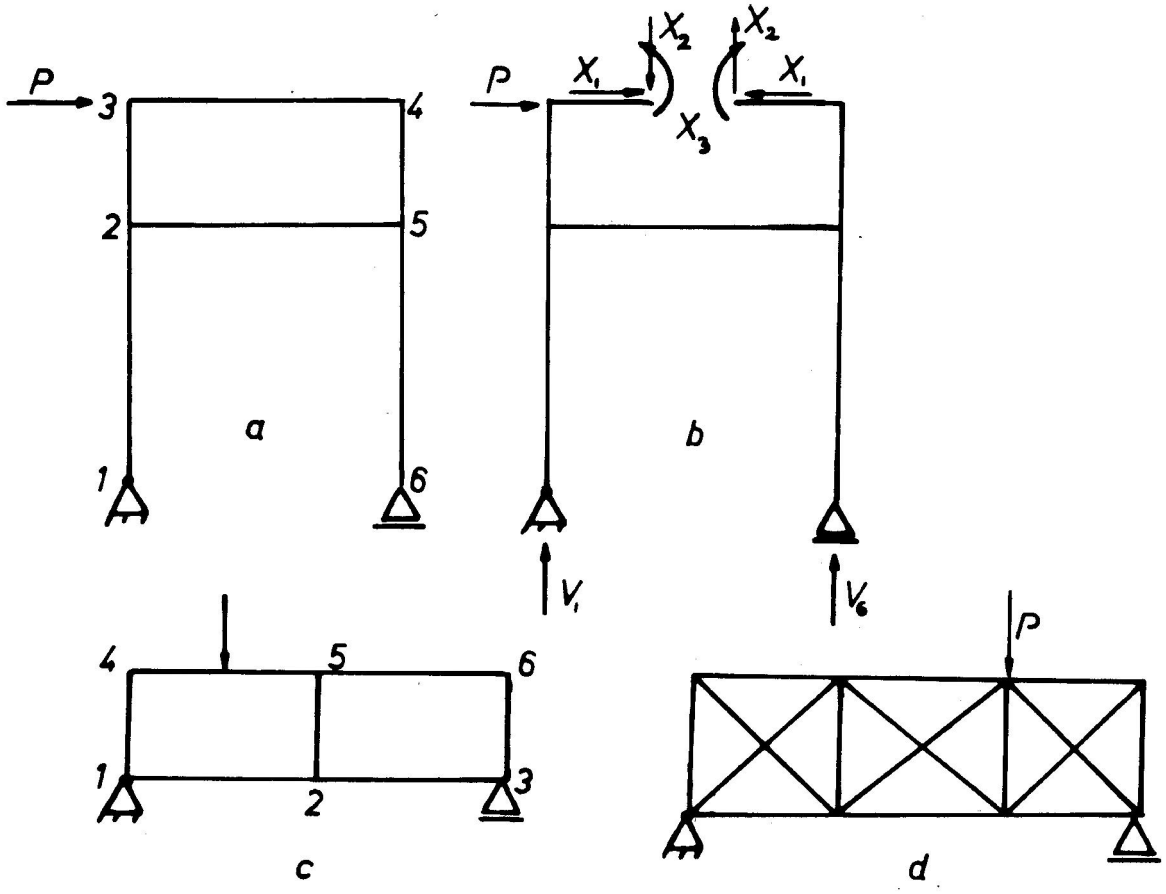


Fig.9.2 Structuri static nedeterminate

Cadrul este static nedeterminat interior şi pentru a ridica nedeterminarea statică se consideră tăiată bara 3-4 la mijloc. În locul legăturilor suprimate se introduc forţele de legătură corespunzătoare X_1 X_2 X_3 . care sînt necunoscutele problemei (fig.9.2b). Structura din fig.(9.2c) este de şase ori static nedeterminată interior, grinda cu zăbrele din fig. 9.2d este de trei ori static nedeterminată, iar arcul cu tirant din fig.9.2e o singură dată static nedeterminat.

Structurile static nedeterminate exterior şi interior au legături suplimentare, faţă de numărul minim în rezemări şi în interiorul structurii.

Gradul de nedeterminare statică al unei structuri se stabileşte prin procedeul contururilor închise. Acesta se bazează pe constatarea că orice contur închis format din bare continue, legate rigid între ele constituie o structură static nedeterminată de trei ori. Acelaşi grad de nedeterminare statică se obţine şi pentru conturul închis format cu terenul, dacă rezemările sînt încastrări. Dacă structura este alcătuită din C contururi închise, gradul de nedeterminare statică se determină din relaţia:

$$n = 3c_i$$

Structura din fig. 9.3a este de şase ori static nedeterminată exterior şi de trei ori static nedeterminată interior. Grinda cu zăbrele din fig.9.3b este odată static nedeterminată exterior şi de două ori static nedeterminată interior.

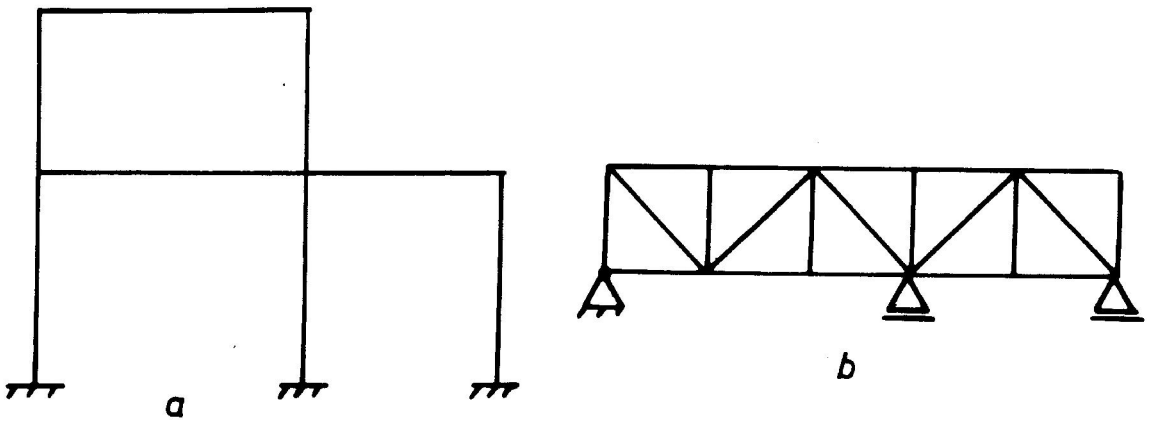


Fig.9.3 Structuri static nedeterminate

Dacă pe parcursul conturului intervin articulaţii (interioare sau exterioare) şi reazeme simple, gradul de nedeterminare statică al structurii se reduce. O articulaţie interioară sau exterioară în care se intersectează două bare (fig.9.4g,h) introduce o condiţie suplimentară că momentul încovoietor este nul. O articulaţie în care se întîlnesc mai multe bare (fig.9.4i) introduce un număr de condiţii suplimentare egal cu numărul articulaţiilor a=b-1.

Dacă în nod se întîlnesc mai multe bare, din care unele sînt încastrate, iar altele prinse articulat, numărul condiţiilor suplimentare este egal cu numărul barelor prinse articulat. Un reazem simplu introduce două condiţii suplimentare care arată că momentul încovoietor şi reacţiunea după direcţia deplasării libere a reazemului sînt nule.

Gradul de nedeterminare statică al unei structuri se stabileşte prin mai multe procedee.

În cazul structurilor plane se poate utiliza relaţia generală:

$n = l_i + r - 3c$ care compară numărul legăturilor interioare l_I şi exterioare din rezemări r, cu numărul elementelor din alcătuirea structurii. Valoarea pozitivă a lui n reprezintă gradul de nedeterminare statică al structurii.

Procedeul contururilor închise se bazează pe constatarea că orice contur închis format din bare continue, legate rigid între ele (fig.9.4a) constituie o structură static nedeterminată de trei ori.

Acelaşi grad de nedeterminare statică se obţine şi pentru conturul închis format cu terenul (fig.9.4b) dacă rezemările sînt încastrări. Dacă structura este alcătuită din c_I contururi închise, gradul de nedeterminare statică se determină din relaţia $n = 3c_i$.

Structura din fig. 9.4c are trei contururi închise şi este de nouă ori static nedeterminată, iar structura din fig.9.4d are $c_i = 6$ şi deci $n = 3 \cdot 6 = 18$ ori static nedeterminată. Dacă pe parcursul conturului intervin articulaţii (interioare sau exterioare) şi reazeme simple, gradul de nedeterminare statică al structurii se reduce. O articulaţie interioară sau exterioară în care se intersectează două bare (fig.9.4g,h) introduce o condiţie suplimentară că momentul încovoietor este nul. O articulaţie în care se întîlnesc mai multe bare (fig.9.4I) introduce un număr de condiţii suplimentare egal cu numărul articulaţiilor $a = b - 1$. Dacă în nod se întîlnesc mai multe bare, din care unele sînt încastrate iar altele prinse articulat (fig.9.4j) numărul condiţiilor suplimentare este egal cu numărul barelor prinse articulat.

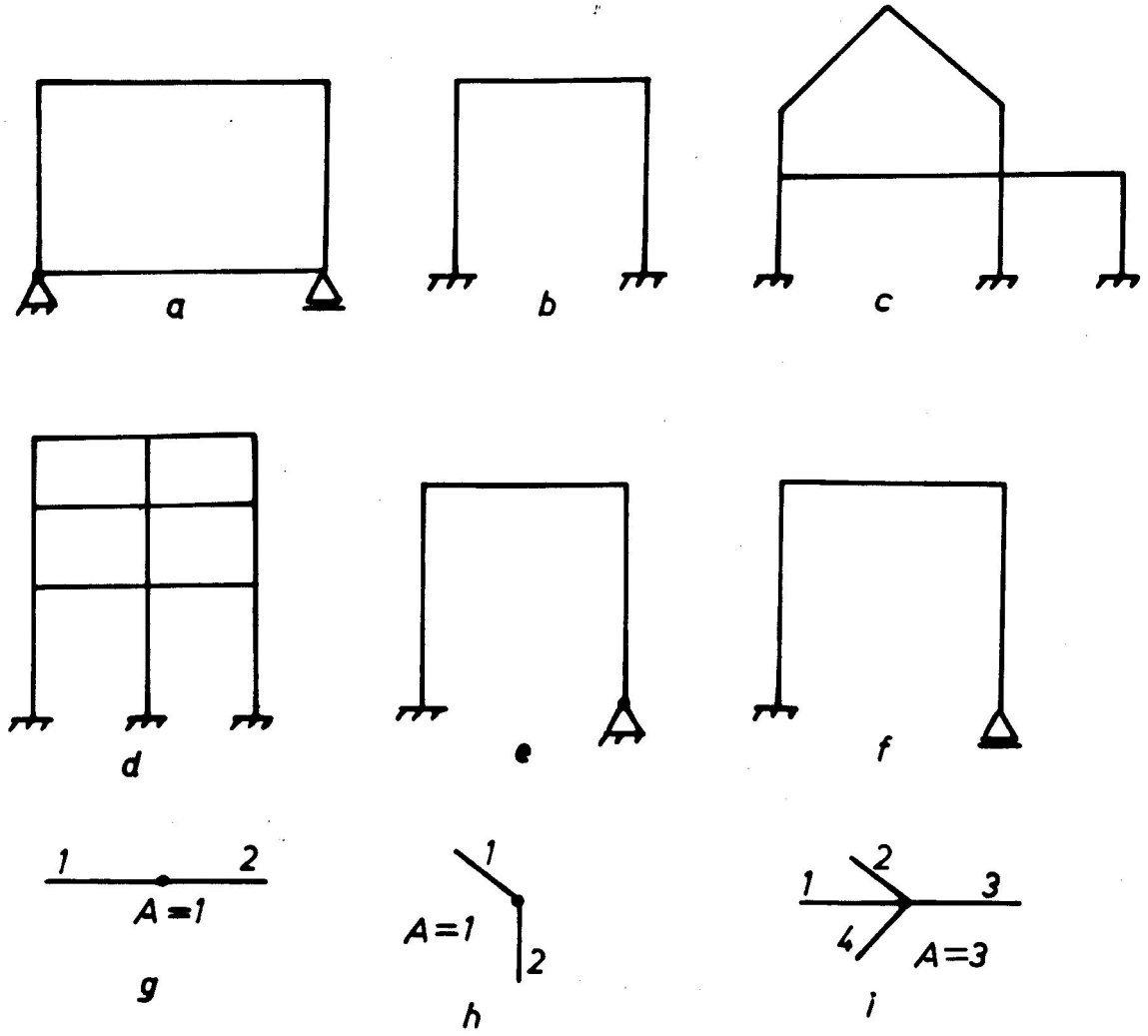


Fig.9.4 Tipuri de structuri static nedeterminate

9.2 Sistem de bază

Pentru calculul unei structuri cu metoda forţelor se transformă structura reală într-o structură static determinată prin suprimarea unui număr de legături egal cu gradul de nedeterminare statică. În locul legăturilor suprimate se introduc forţele de legătură corespunzătoare, care constituie necunoscutele problemei. Necunoscutele se notează cu X_j; indicele j ia valorile j=1,2,…n şi reprezintă forţe de legătură simple sau perechi de forţe de legătură egale şi de sens contrar. În scrierea matriceală necunoscutele se notează prin vectorul {X} definit astfel: $\{X\} = [X_1 X_2 ... X_j ... X_n]^T$

Structura static determinată obţinută din structura reală prin suprimarea unui număr de legături egal cu gradul de nedeterminare statică poartă numele de structură de bază (structură primară). Asupra structurii de bază se aplică forţele exterioare date {P} şi forţele de legătură exteriorizate {X} în urma suprimării legăturilor suplimentare. Structura static nedeterminată din fig.9.5a se transformă într-o structură static determinată prin suprimarea unui număr de două legături. Suprimarea legăturilor se poate face în mai multe moduri şi de fiecare dată se obţine o structură static determinată corect alcătuită.

La suprimarea legăturilor trebuie avut grijă ca structura de bază obţinută să aibă invariabilitatea geometrică şi fixarea în plan asigurate, să nu aibă anumite substructuri cu formă critică sau static nedeterminate. Orice structură static nedeterminată se poate transforma prin suprimarea legăturilor suplimentare în structură static determinată.

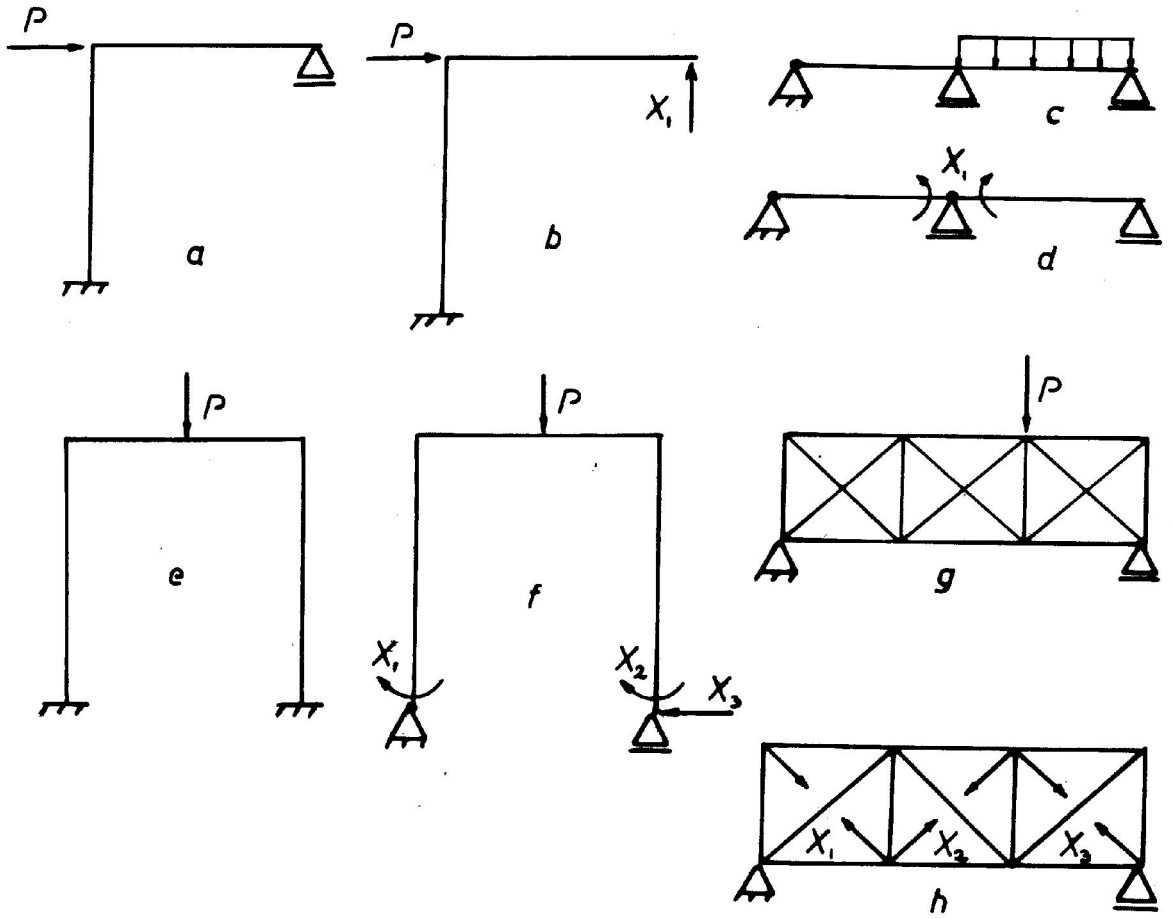


Fig.9.5 Exemple de obţinere a sistemului de bază în metoda eforturilor

9.3 Condiţia de echilibru static

Prin transformarea structurii static nedeterminate în structură de bază, calculul eforturilor şi deplasărilor se conduce ca la o structură static determinată. Rezultă că rezolvarea structurii static nedeterminate se reduce la calculul unei structuri static determinate din acţiunile exterioare {P} şi din forţele de legătură necunoscute X_j (j=1,2,…n). Din condiţia de echilibru static al structurii de bază, exprimată prin ecuaţiile de echilibru static, se determină reacţiunile şi eforturile pe toată structura de bază din forţele exterioare {P} şi necunoscutele {X} de mărime arbitrară.

Pe structura de bază se aplică pe rînd fiecare necunoscută X_j şi separat forţele exterioare, trasînd diagramele de eforturi corespunzătoare. Rezultă că una din condiţiile de bază folosite la calculul structurilor este satisfăcută. Eforturile şi deplasările produse de aplicarea pe structura de bază a acţiunilor (forţe exterioare, variaţia de temperatură, cedările de reazeme) constituie soluţia particulară. Eforturile şi deplasările produse de aplicarea pe structura de bază a necunoscutelor {X} constituie soluţia complementară. Soluţia complementară stabileşte contribuţia forţelor de legătură suplimentare (efectul nedeterminării statice) asupra diagramelor de eforturi şi deplasărilor obţinute pe structura static determinată. Soluţia particulară şi soluţia complementară se combină între ele în ecuaţia de compatibilitate pentru a determina valorile reale ale necunoscutelor{X}.

9.4 Ecuaţii de compatibilitate

Prin transformarea structurii static nedeterminate în structura de bază în secţiunile unde s-au suprimat legături, se produc deplasări pe direcţia fiecărei necunoscute. Valorile reale ale necunoscutelor se determină din condiţia ca structura de bază, supusă la forţele exterioare date şi necunoscutele {X}, să se deformeze identic cu structura reală static nedeterminată. Această condiţie constituie condiţia de compatibilitate a deformatei structurii care se utilizează în metoda forţelor şi se scrie pentru fiecare necunoscută. Deplasările pe structura static nedeterminată, în punctele de aplicaţie şi după direcţia necunoscutelor sînt nule (sau cunoscute), deoarece deformata structurii este continuă şi între cele două feţe ale unei secţiuni nu se produc deplasări relative. Deplasarea pe structura static nedeterminată după direcţia necunoscutei X_I se determină aplicînd principiul suprapunerii efectelor.

$$(9.1)\ \text{K}\ D_i = \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + ... + \delta_{ij}X_j + ...\delta_{in}X_n + \Delta_{ip}{}^0 = 0$$

în care: δij este deplasarea din punctul de aplicaţie şi după direcţia necunoscutei X_I produsă de aplicarea pe structura de bază a necunoscutei $X_j=1$; $\Delta_{ip}{}^0$ –deplasarea din punctul de aplicaţie şi după direcţia necunoscutei X_I produsă de aplicarea pe structura de bază a forţelor exterioare.

Ecuaţia (9.1) poartă numele de ecuaţia de compatibilitate (de condiţie sau de echilibru elastic) din metoda forţelor. Scriind ecuaţiile de compatibilitate după direcţia fiecărei necunoscute se obţine un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute din care se calculează valorile reale ale necunoscutelor static nedeterminate:

$$(9.2)\ \text{K}\ \{U_x\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_i \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & ... & \delta_{1n} \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} & ... & \delta_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & ... & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_j \\ X_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta_{1p}{}^0 \\ \Delta_{ip}{}^0 \\ \Delta_{np}{}^0 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

sau care sub formă restrînsă se scrie astfel:

$$(9.3)\ \text{K}\ \{U_i\} = [D_{ij}]\{X_j\} + \{\Delta_{iP}{}^0\} = \{0\},\ \text{K}\ j = 1,2...n$$

Matricea $[D_{ij}]$ reprezintă matricea de flexibilitate a structurii. Este o matrice pătrată şi conţine deplasările unitare (coeficienţi de influenţă) după direcţiile necunoscutelor produse de aplicarea succesivă pe structura de bază a fiecarei necunoscute egală cu unitatea. Elementele din coloana j a matricii [Dij] reprezintă deplasările după direcţia necunoscutelor X_I (I=1,2…n) produse de aplicarea pe structura de bază a necunoscutei $X_j=1$ celelalte necunoscute fiind egale cu zero. Din teorema reciprocităţii deplasărilor unitare a lui Maxwell se cunoaşte că $\delta_{ij}=\delta_{ji,}$ în consecinţă matricea [Dij]este o matrice pătrată simetrică.

Vectorul deplasărilor după direcţiile necunscutelor $\{\Delta_{ip}{}^0\}$ produs de aplicarea pe structura de bază a forţelor exterioare se mai scrie:

$$(9.3a)\ \text{K}\ \{\Delta_{ip}{}^0\} = [D_{ij}]\{P_j\}\ \text{K}\ j = 1,2,..n\ .$$

Matricea $[\Delta_{ip}]$ este o matrice coloană ale cărei elemente reprezintă deplasările după direcţiile necunoscutelor X_I (I=1,2,n) produse de aplicarea succesivă pe structura de bază a forţelor $P_j=1$(j=1,2,…n). Elementele din coloana j a matricii $[D_{ij}]$ reprezintă deplasările după direcţia necunoscutelor X_I (I=1,2…n) produse de aplicarea pe structura de bază a forţei $P_j=1$ celelalte forţe P fiind egale cu zero. Vectorul {P} conţine toate forţele exterioare aplicate pe structura de bază.

Sistemul de ecuaţii (9.2) reprezintă ecuaţiile de compatibilitate din metoda forţelor, de unde derivă şi denumirea de metoda compatibilităţii. Din rezolvarea sistemului de ecuaţii se determină valorile reale ale necunoscutelor.

$$(9.4)\ \text{K}\ \{X_i\} = -[D_{ij}]^{-1}\{P_j\},...\ j = 1,2,..n$$

unde $[D_{ij}]^{-1}$ este inversa matricei flexibilităţii structurii de bază şi reprezintă de fapt matricea de rigiditate.

Reiese că prin trecerea la structura de bază static determinată în metoda forţelor se satisface condiţia de echilibru a structurii şi condiţia compatibilitate nu este îndeplinită. Scrierea ecuaţiilor de

compatibiltate permite calculul necunoscutelor reale şi asigură îndeplinirea condiţiei de compatibilitate a deformatei structurii şi relaţiile între forţe şi deplasări.

În cazul în care determinantul matricii de rigiditate este egal cu zero atunci structura îşi pierde stabilitatea, iar una din soluţii în rezolvarea sistemului de ecuaţii o reprezintă soluţia banală.

9.4.1Calculul elementelor din matricea flexibilităţii structurii de bază.

Matricea flexibilităţii structurii de bază conţine pentru o structură de n ori static nedeterminată n^2 coeficienţi de influenţă δ_{ij} (I,j=1,2,…n). În problemele practice nu este necesar să se calculeze toţi cei n^2 coeficienţi de flexibilitate, deoarece conform teoremei reciprocităţii deplasărilor unitare $\delta ij=\delta_{ji}$. Coeficienţii de influenţă δ_{ij} se calculează cu formula Maxwell-Mohr:

$$(9.5)\ \mathrm{K}\ \delta_{ij} = \delta_{ji} = \sum\int \frac{m_i m_j}{EI} ds + \sum\int \frac{n_i n_j}{EA} ds + \sum\int \frac{\alpha t_i t_j}{GA} ds$$

$$(9.6)\ \mathrm{K}\ \delta_{ii} = \sum\int \frac{m_i^{\ 2}}{EI} ds + \sum\int \frac{n_i^{\ 2}}{EA} ds + \sum\int \frac{\alpha t_i^{\ 2}}{GA} ds$$

din care se vor lua în considerare numai anumite integrale, în funcţie de structura care se rezolvă.

Din analiza expresiilor (9.5), (9.6) se observă că pentru a calcula coeficienţii de formă δij se integrează diagramele de eforturi obţinute din aplicarea pe structura de bază a necunoscutei $X_I=1$ cu diagramele de eforturi obţinute din necunoscuta $X_j=1$. Pentru calculul tuturor coeficienţilor sînt necesare diagramele de eforturi produse de aplicarea succesivă pe structura de bază a tuturor necunoscutelor $X_I=1$(I=1,2,..n). Coeficienţii de formă δ_{ii} se calculează integrînd diagramele de eforturi produse de aplicarea pe structura de bază a necunoscutei $X_I=1$ cu ele însele şi sînt totdeauna pozitivi.

Deplasările δ_{i1} (I=1,2,..n) din prima coloană a matricei [Δxx] se calculează integrînd diagramele de eforturi din $X_1=1$ cu diagramele de eforturi din $X_I=1$(I=1,2,..n). Analog se calculează deplasările δ_{i2}(I=1,2,..n) din coloana a doua, integrînd diagramele de eforturi din $X_2=1$ cu diagramele de eforturi din $X_I=1$(I=1,2,..n). În final se calculează deplasările δ_{in} din coloana n prin integrarea diagramelor de eforturi dn $X_n=1$ cu diagramele de eforturi din $X_I=1$(I=1,2,..n) stabilite pe structura de bază static determinată. Din expresia (9.5) se observă că deplasările δ_{ij} nu depind de forţele aplicate pe structură, ci numai de structura de bază, de elementele geometrice ale secţiunii barelor structurii (A,I) şi de modulii de elasticitate ai materialului (E,G). Aceasta înseamnă că pentru o anumită structură de bază, coeficienţii de influenţă din matricea flexibilităţii sînt invarianţi, adică la schimbarea forţelor aplicate pe structură se recalculează numai matricea coloană a termenilor liberi din sistemul de ecuaţii.

Matricea flexibilităţii structurii de bază $[D_{ij}]$ se poate calcula şi în funcţie de matricele flexibilităţii elementelor structurale componente. Pentru aceasta trebuie să se ţină seama că direcţiile deplasărilor din matricea flexibilităţii corespund cu direcţiile necunoscutelor {X} şi sînt produse de aplicarea succesivă pe structura de bază a necunoscutelor $X_j=1$ (j=1,2,..n)

9.4.2 Calculul elementelor din matricea termenului liber

Calculul valorilor reale ale necunoscutelor {X} necesită determinarea deplasărilor din vectorul termenului liber $\{\Delta_{ip}^{\ 0}\}$produse de aplicarea pe structura de bază a forţelor exterioare. Aceste deplasări la structurile alcătuite din bare se calculează cu formula Maxwell-Mohr:

$$(9.7)\ \mathrm{K}\ \Delta_{ip}^{\ 0} = \sum\int \frac{m_i M_p^{\ 0}}{EI} ds + \sum\int \frac{n_i N_p^{\ 0}}{EA} ds + \sum\int \frac{\alpha t_i T_p^{\ 0}}{GA} ds$$ în care indicele I se referă la

diagramele produse de aplicarea pe structura de bază a necunoscutei $X_I=1$, iar diagramele $M_p^{\ 0}$, $T_p^{\ 0}$, $N_p^{\ 0}$ sînt produse de aplicarea pe structura de bază a forţelor exterioare. Deplasările $\{\Delta_{ip}^{\ 0}\}$ se pot calcula şi din relaţia matriceală (9.3a).

9.4.3 Eforturile finale în structura static nedeterminată.

După determinarea necunoscutelor , eforturile finale se determină folosind principiul suprapunerii efectelor. Momentul încovoietor pe structura static determinată se stabileşte însumînd soluţia particulară cu soluţia complementară:

(9.8) K $M_p = M_p^{\,0} + m_1 X_1 + ... + m_j X_j + ... m_n X_n = M_p^{\,0} + \sum_{j=1}^{n} m_j X_j$ în care $M_p^{\,0}$ este momentul încovoietor produs de forţele exterioare aplicate pe structura de bază; m_j- momentul încovoietor produs de aplicarea pe structura de bază a necunoscutelor X_j=1;

9.4.4 Calculul deplasărilor pe structura static nedeterminată

Deplasarea absolută din secţiunea k după direcţia dată (δP_k=1) pe structura static nedeterminată se calculează din relaţia:

(9.9) K $\Delta_{kp} = \Delta_{kp}^{\,0} + \delta_{k1} X_1 + ... + \delta_{kj} X_j + ... + \delta_{kn} X_n = \Delta_{kp}^{\,0} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj} X_j$

în care $\Delta_{kp}^{\,0}$ reprezintă deplasarea din secţiunea k pe structura static determinată de bază, produsă de forţele exterioare, iar δ_{kj} deplasarea din aceeaşi secţiune produsă de aplicarea pe structura static determinată a necunoscutei X_j=1. Deplasările $\Delta_{kp}^{\,0}$ şi δ_{kj} se calculează din expresiile:

(9.10) K $\Delta_{kp}^{\,0} = \sum \int \frac{m_k^{\,0} M_p^{\,0}}{EI} ds + \sum \int \frac{n_k^{\,0} N_p^{\,0}}{EA} ds + \sum \int \frac{\alpha t_k^{\,0} T_p^{\,0}}{GA} ds$

(9.11) K $\delta_{kj} = \sum \int \frac{m_k^{\,0} m_j}{EI} ds + \sum \int \frac{n_k^{\,0} n_j}{EA} ds + \sum \int \frac{\alpha t_k^{\,0} t_j}{GA} ds$

Eforturile $m_k^{\,0}$,$n_k^{\,0}$ şi $t_k^{\,0}$ rezultă din aplicarea pe structura de bază a forţei virtuale δP_k=1 în direcţia deplasării U_k iar eforturile $M_p^{\,0}$ $N_p^{\,0}$ şi $T_p^{\,0}$ sînt produse de aplicarea pe structura de bază a forţelor exterioare. Diagramele de eforturi m_j, n_j, t_j sînt produse de aplicarea succesivă a forţelor X_j=1,(j=1,2,…n)pe structura de bază. Luînd în considerare numai influenţa momentelor încovoietoare din relaţiile (9.10) şi (9.11) şi introducîndu-le în expresia (9.9) se obţine:

(9.12) K $\Delta_{kp} = \sum \int \frac{m_k^{\,0} M_p}{EI} ds + \sum \int \frac{n_k^{\,0} N_p}{EA} ds + \sum \int \frac{\alpha t_k^{\,0} T_p}{GA} ds$

şi ţinînd seama de relaţia (9.8) rezultă:

(9.13) K $\Delta_{kp} = \sum \int \frac{m_k^{\,0} M_p}{EI} ds$

Demonstraţia este analoagă şi pentru influenţa forţei axiale şi a forţei tăietoare. Deplasarea din secţiunea k după direcţia lui δP_k=1 pe structura static nedeterminată se determină integrînd diagrama de moment din forţa virtuală δP_k=1, stabilită pe orice structură static determinată derivată din structura reală, cu diagrama de moment încovoietor din forţele exterioare determinată pe structura static nedeterminată. Dacă la calculul deplasării Δ_{kp} se ia în considerare influenţa forţei axiale şi a forţei tăietoare relaţia de mai sus devine:

(9.14) K $\Delta_{kp} = \sum \int \frac{m_k^{\,0} M_p}{EI} ds + \sum \int \frac{n_k^{\,0} N_p}{EA} ds + \sum \int \frac{\alpha t_k^{\,0} T_p}{GA} ds$ în care diagramele M_p , N_p şi T_p se determină cu luarea în considerare a aceloraşi eforturi.

Etapele de calcul în rezolvarea unei structuri static nedeterminate cu metoda forţelor sînt următoarele:

-se determină gradul de nedeterminare statică n;

-se alege structura de bază static determinată (structura primară) prin suprimarea a n legături şi înlocuirea lor cu forţele de legătură X_j (j=1,2,…n), şi se trasează diagramele de eforturi;

-se calculează elementele din matricea flexibilităţii structurii de bază $[D_{ij}]$

-se calculează deplasările $\{\Delta_{ip}^{0}\}$ produse de forţele exterioare;

-se rezolvă sistemul de ecuaţii printr-o metodă oarecare sau calculînd matricea $[D_{ij}]^{-1}$;

-se calculează diagrama momentului încovoietor final; diagramele T_p şi N_p se deduc din diagrama M_p şi din condiţii de echilibru static.

-se calculează deplasările pe structura static nedeterminată după anumite direcţii.

Exemplul 1:

Pentru structura static nedeterminată din figura 9.6 să se traseze diagrama finală de moment, folosind metoda eforturilor.

Gradul de nedeterminare statică se stabileşte cu relaţia.

$$N = 3C - A - 2S$$

$$N = 3 \cdot 1 - 2 = 1$$

Sistemul de bază se obţine prin eliminarea unei legături suplimentare şi introducerea echivalentului mecanic, în cazul de faţă momentul X_1.

Din următoarele sume de moment se determină valorile reacţiunilor pentru sistemul de bază încărcat numai cu forţe exterioare.

$$(\sum M)_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 8 - 30 \cdot 4 \cdot 2 + 30 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

$$V_1 = 22{,}5KN$$

$$(\sum M)_1 = 0 \rightarrow -V_2 \cdot 8 + 30 \cdot 6 \cdot 7 = 0$$

$$V_2 = 157{,}5KN$$

$$(\sum M)_3^{st} = 0 \rightarrow 22{,}5 \cdot 4 - H_1 \cdot 6 = 0 \text{ K } H_1 = 15KN$$

$$M_4 = 15 \cdot 6 = 90KNm$$

$$M_5 = 30 \cdot 2 \cdot 1 = 60KNm$$

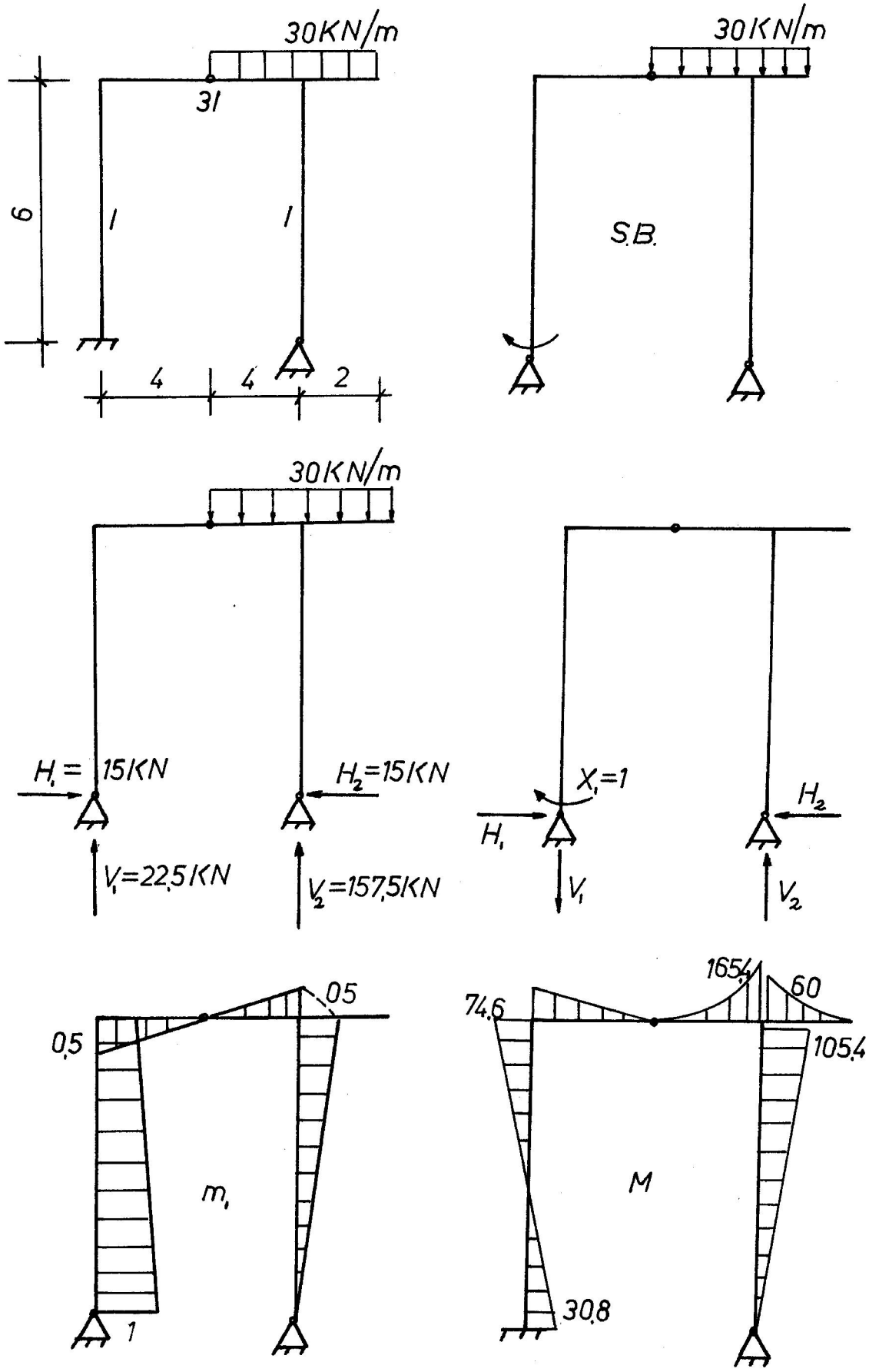


Fig.9.6 Diagrama de moment obţinută prin metoda eforturilor

Similar se procedează la determinarea reacţiunilor şi pentru sistemul de bază încărcat cu X_1=1.

$$(\sum M)_2 = 0 \rightarrow -V_1 \cdot 8 + 1 = 0 \,\text{K}\, V_1 = \frac{1}{8} = V_2$$

$$(\sum M)_3^{st} = 0 \rightarrow -\frac{1}{8} \cdot 4 + 1 - H_1 \cdot 6 = 0 \,\text{K}\, H_1 = \frac{1}{12} KN$$

$$M_4 = 1 - \frac{1}{12} \cdot 6 = 0.5KN$$

Ecuaţia de condiţie are forma:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^{\,2}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0.5 \right) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 6 \left(\frac{2}{3} \cdot 0.5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) +$$

$$+ \frac{1}{3EI} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0.5 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}5 =$$

$$\frac{1}{EI}(2{,}5 + 1 + 0{,}22 + 0{,}5) = \frac{4{,}22}{EI}$$

Termenul δ_{11} se obţine din integrarea diagramei m_1 cu ea însăşi, iar Δ_{1p} prin integrarea diagramei m_1 cu $M_p^{\,0}$.

$$\Delta_{1p} = \int \frac{M_p^{\,0} m_1}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 6 \left(\frac{2}{3} \cdot 0{,}5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) -$$

$$-\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}5 + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0{,}5 -$$

$$-\frac{1}{3EI} \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 4}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0{,}5 \cdot \frac{1}{EI} \frac{1}{2} 90 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} 0{,}5 =$$

$$\frac{1}{EI}(-180 - 20 + 33{,}33 - 53{,}33 + 90) = -\frac{130}{EI}$$

Diagrama finală de moment se obţine prin suprapunere de efecte:

$$M = M_p^{\,0} + m_1 X_1$$

$$M_{1-4} = 30{,}8KN$$

$$M_{4-1} = -90 + 0{,}5 \cdot 30{,}8 = -74{,}6$$

$$M_{5-4} = -150 - 0{,}5 \cdot 30{,}8 = -165{,}4$$

$$M_{5-2} = -90 - 0{,}5 - 30{,}8 = -105{,}4$$

Exemplul 2:

Pentru structura static nedeterminată din figura 9.7 să se traseze diagrama finală de moment încovoietor, folosind metoda eforturilor.

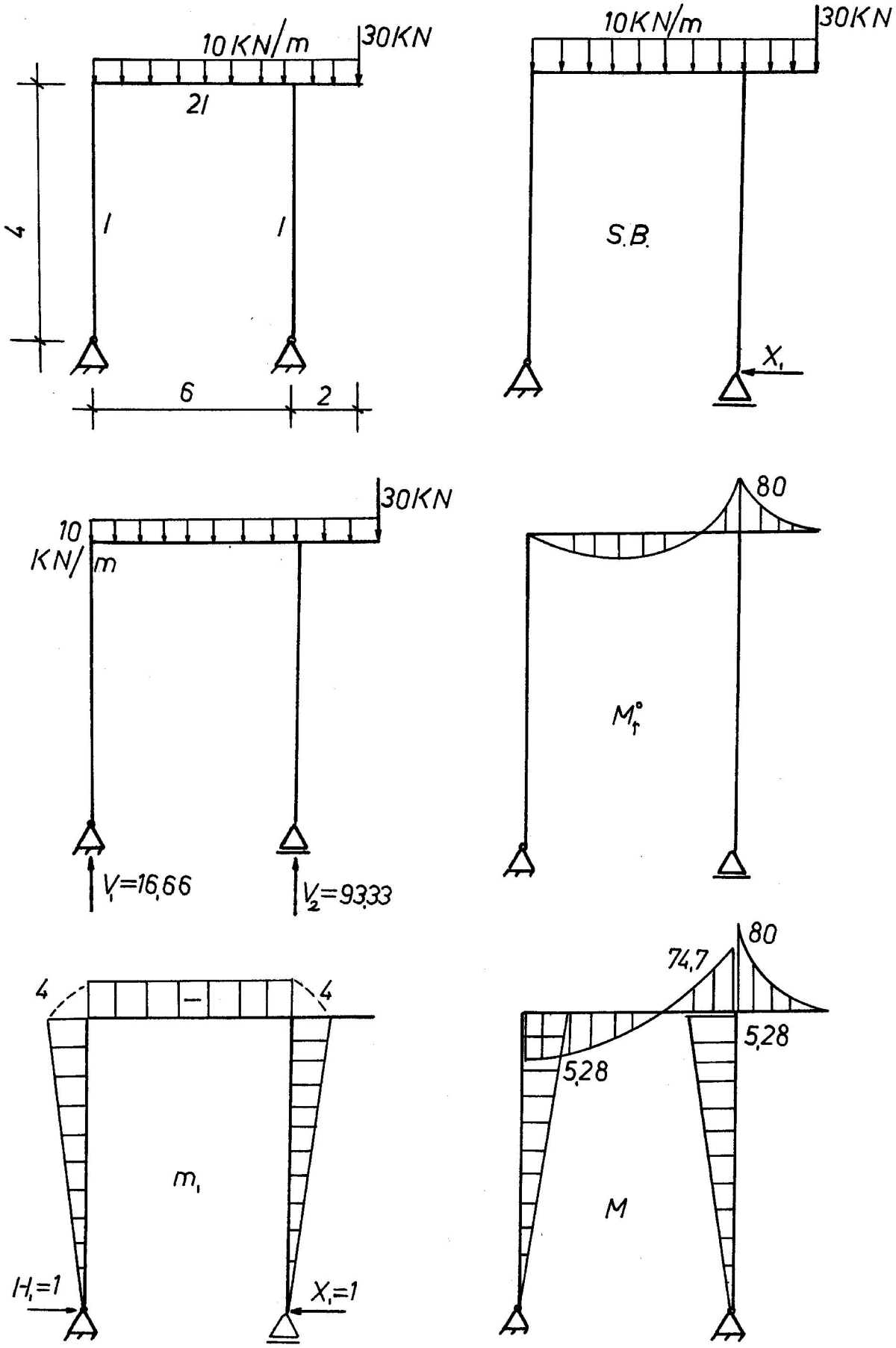


Fig.9.7 Diagramă de moment obţinută prin metoda eforturilor

Gradul de nedeterminare statică este:

$N = 3C - A - 2S$

$N = 3 \cdot 1 - 2 = 1$

Sistemul de bază se obţine prin eliminarea unei legături suplimentare şi introducerea echivalentului mecanic, în cazul de faţă forţa orizontală X_1.

Din următoarele sume de moment se determină valorile reacţiunilor pentru sistemul de bază încărcat numai cu forţe exterioare.

$(\sum M)_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 6 - 10 \cdot 6 \cdot 3 + 10 \cdot 2 \cdot 1 + 30 \cdot 2 = 0$

$V_1 = 16{,}66KN$

$(\sum M)_1 = 0 \rightarrow 10 \cdot 8 \cdot 4 + 30 \cdot 8 - V_2 \cdot 6 = 0$

$V_2 = 93{,}33KN$

$M_{43} = 16{,}66 \cdot 6 - 10 \cdot 6 \cdot 3 = -80KNm$

Coeficientul necunoscutei şi termenul liber se determină cu relaţiile Maxwell Mohr:

$\delta_{11} = \int \frac{m_1^{\ 2}}{EI} dx = 2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 = \frac{1}{EI}(42{,}66 + 48) =$

$\frac{90{,}66}{EI}$

$\Delta_{1p} = \int \frac{M_p^{\ 0} m_1}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 6 \cdot 4 - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{10 \cdot 6}{8} \cdot 6 \cdot 4 =$

$\frac{1}{EI}(480 - 360) = \frac{120}{EI}$

$X_1 = 1{,}32$

Diagrama finală de moment se obţine prin suprapunere de efecte:

$M = M_p^{\ 0} + m_1 X_1$

$M_3 = (-4)(-1{,}32) = 5{,}28$

$M_{43} = -80 + 4 \cdot 1{,}32 = -74{,}7KNm$

Exemplul 3:

Pentru structura static nedeterminată din figura 9.8 să se traseze diagrama finală de moment încovoietor, folosind metoda eforturilor.

Gradul de nedeterminare statică:

$N = 3C - A - 2S$

$N = 3 \cdot 2 - 2 - 2 \cdot 1 = 2$

$H_1 = 30 \cdot 4 = 120KN$

$(\sum M)_2 = 0 \rightarrow -V_1 \cdot 6 + 30 \cdot 4 \cdot 2 = 0$

$V_1 = 40KN$

$M_3 = 120 \cdot 4 - 30 \cdot 4 \cdot 2 = 240KNm$

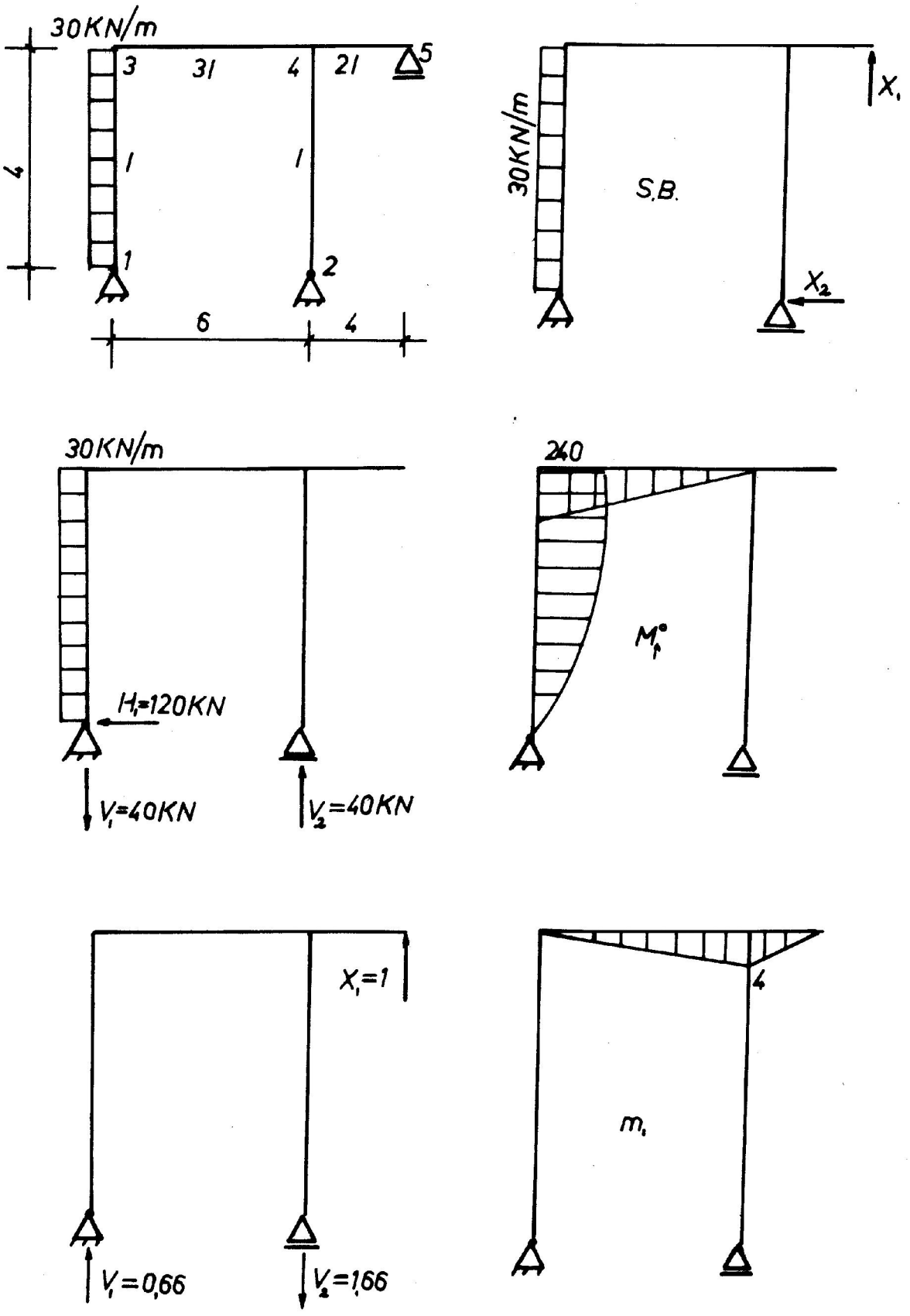


Fig.9.8 Structură de 2 ori static nedetrminată rezolvată prin metoda eforturilor

Momentul în punctul 4 se obţine ca fiind suma momentelor forţelor din stînga secţiunii.Moment în punctul 4 va da reacţiunea V_1 şi încărcarea uniform distribuită.

$$M_4 = -40 \cdot 6 + 120 \cdot 4 - 30 \cdot 4 \cdot 2 = 0$$

În pasul următor se determină reacţiunile V_1 şi V_2 pentru sistemul de bază încărcat doar cu X_1=1.

$$(\sum M)_2 = 0 \rightarrow V_1 \cdot 6 - 1 \cdot 4 = 0$$

$$V_1 = \frac{2}{3} KN$$

$$(\sum M)_1 = 0 \rightarrow V_2 \cdot 6 - 1 \cdot 10 = 0$$

$$V_2 = 1{,}66 KN$$

Coeficienţii necunoscutelor şi termenii liberi se determină cu relaţiile:

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^{\ 2}}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot =$$

$$\frac{1}{EI}(10{,}66 + 10{,}66) = \frac{21{,}33}{EI}$$

$$\delta_{22} = \int \frac{m_2^{\ 2}}{EI} dx = 2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3EI} 4 \cdot 6 \cdot 4 =$$

$$= \frac{1}{EI}(42{,}66 + 32) = \frac{74{,}66}{EI}$$

$$\delta_{12} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 = -\frac{16}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{M_p^{\ 0} m_1}{EI} dx = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{640}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = \int \frac{M_p^{\ 0} m_2}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 -$$

$$-\frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{30 \cdot 4^2}{8} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 6 \cdot 4 =$$

$$= \frac{1}{EI}(-1280 - 320 - 960) = -\frac{2560}{EI}$$

$$\begin{cases} 21{,}33 X_1 - 16 X_2 + 640 = 0 \\ -16 X_1 + 74{,}66 X_2 - 2560 = 0 \end{cases}$$

În urma rezolvării sistemului de ecuaţii se obţin necunoscutele X_1 şi X_2.

$$\begin{cases} X_1 = -5{,}1 \\ X_2 = 13{,}19 \end{cases}$$

Diagrama finală de moment se obţine prin suprapunere de efecte.

$$M_{31} = 240 - 4 \cdot 33{,}19 = 107{,}24$$

$$M_{43} = -4 \cdot 5{,}1 - 4 \cdot 33{,}19 =$$

$$= -153{,}16 KNm$$

$$M_{42} = -4 \cdot 33{,}19 = -132{,}76$$

$$M_{45} = -4 \cdot 5{,}1 = -20{,}4$$

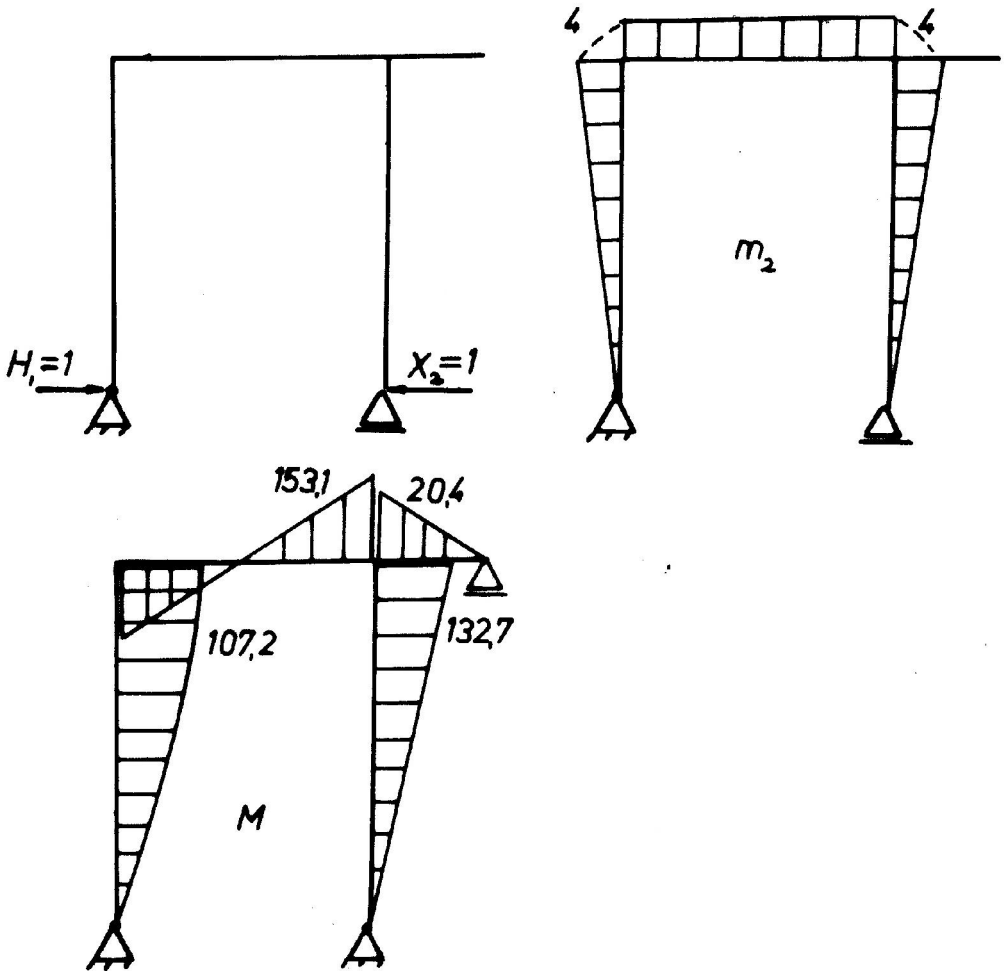


Fig.9.9 Diagramă unitară m_2 şi diaagramă finală de moment

Exemplul 4:

Pentru structura static nedeterminată din figura9.10 să se traseze diagrama finală de moment încovoietor, folosind metoda eforturilor.

În acest caz gradul de nedeterminare statică este egal cu 2.

$$(\sum M)_2 = 0 \rightarrow -V_1 \cdot 6 + 15 \cdot 8 \cdot 4 = 0 \rightarrow$$

$$V_1 = 80KN = V_2$$

$$M_{31} = 120 \cdot 4 - 15 \cdot 4 \cdot 2 = 360KNm$$

$$\delta_{11} = 2\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{EI} \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 =$$

$$\frac{1}{EI}(48 + 144) = \frac{192}{EI}$$

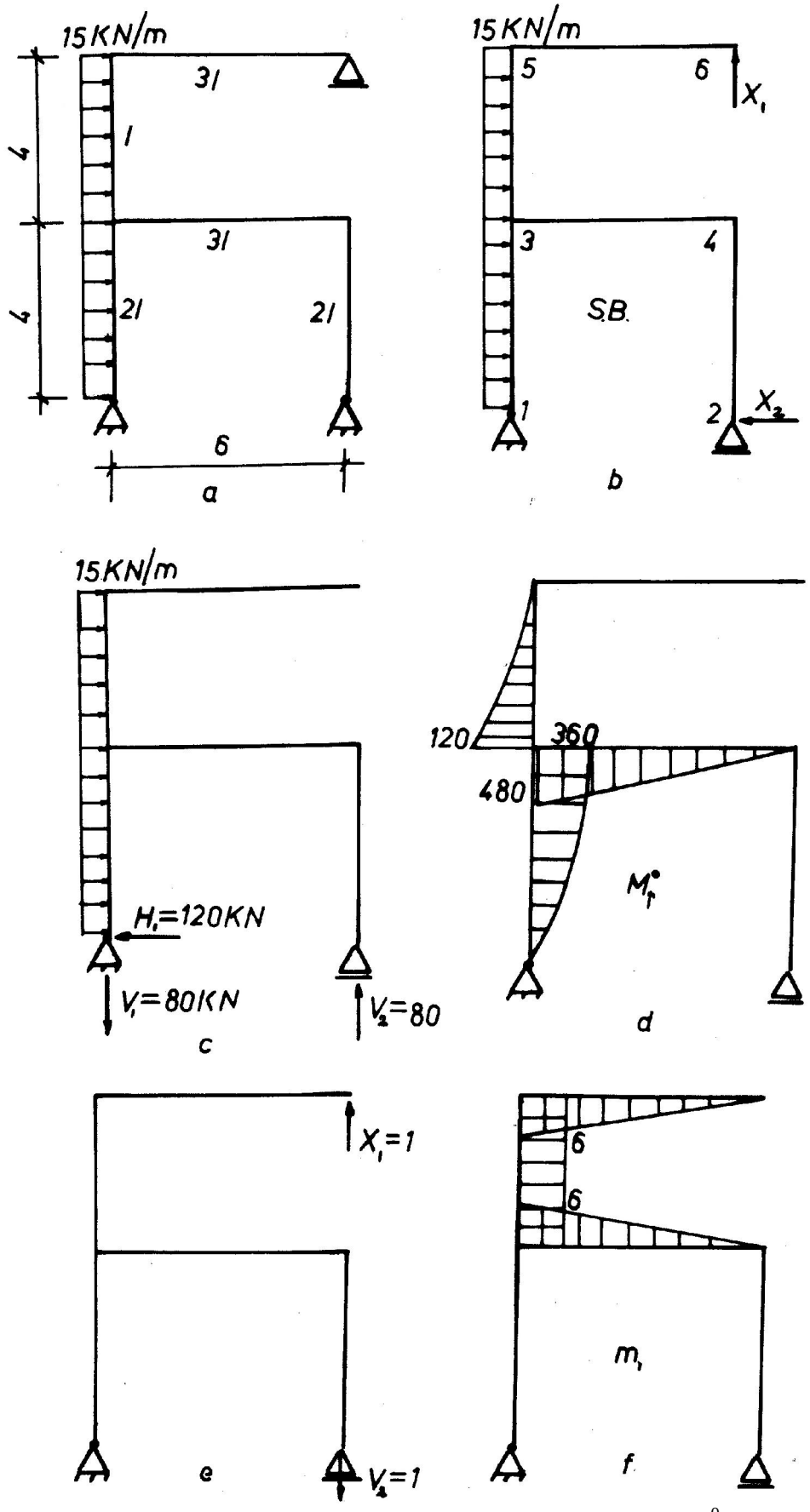


Fig.9.10 Rezolvare prin metoda eforturilor (S.B. m_1,M_p^0)

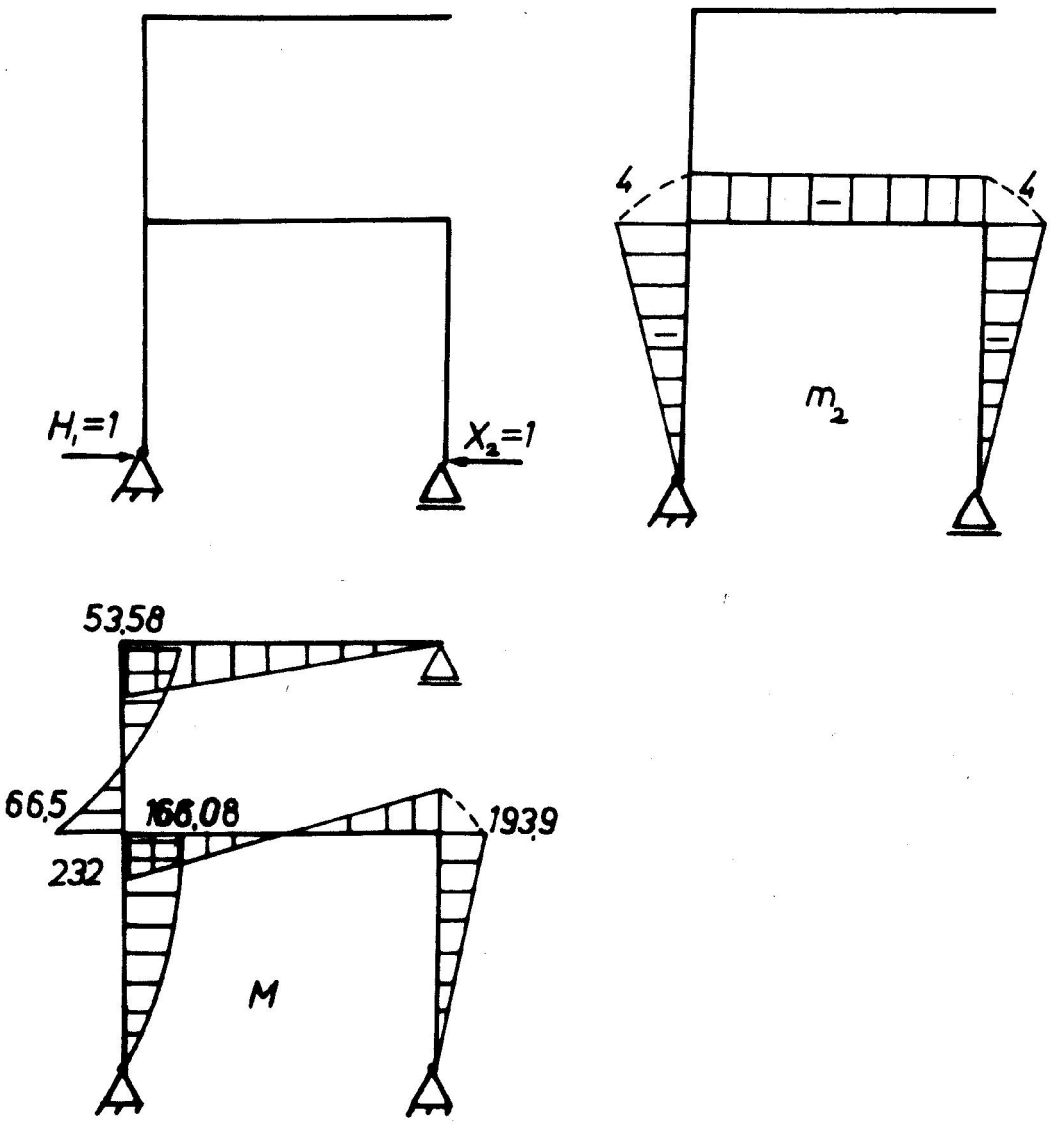


Fig.9.11 Diagrama m_2 şi diagrama finală M

$$\delta_{22} = 2 \cdot \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3EI} \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 =$$

$$= \frac{1}{EI}(21{,}33 + 32) = \frac{53{,}33}{EI}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 = \frac{24}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = -\frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 480 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 4 \cdot 6 +$$

$$\frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{15 \cdot 16}{8} \cdot 4 \cdot 6 = \frac{1}{EI}(-1920 - 1440 + 480) = -\frac{2880}{EI}$$

$$\Delta_{2p} = -\frac{1}{2EI}\frac{1}{2}\cdot 360\cdot 4\cdot\frac{2}{3}\cdot 4 - \frac{1}{3EI}\frac{1}{2}\cdot 480\cdot 6\cdot 4 =$$

$$\frac{-960-1920}{EI} = -\frac{2880}{EI} + \frac{1}{2EI}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{15\cdot 4^2}{8}\cdot\frac{1}{2}4 = \frac{-2800}{EI}$$

$$\begin{cases} 192X_1 + 24X_2 - 2880 = 0 \\ 24X_1 + 53{,}33X_2 - 2800 = 0 \end{cases}$$

$X_1 = 8{,}93 \text{ K } X_2 = 48{,}48$

Momentele finale pe structură se obţin prin suprapunere de efecte.

$M_{31} = 360 - 4\cdot 48{,}48 = 166{,}08$

$M_{35} = -120 + 6\cdot 8{,}93 = -66{,}42$

$M_{53} = 6\cdot 8{,}93 = 53{,}58$

$M_{34} = 480 - 6\cdot 8{,}93 - 4\cdot 48{,}48 = 232{,}5$

$M_{43} = -4\cdot 48{,}48 = -193{,}92$

Exemplul 5:

Pentru structura static nedeterminată din figura9.12 să se traseze diagrama finală de moment încovoietor, folosind metoda eforturilor

Într-o primă etapă se determină gradul de nedeterminare statică: $N = 3C - A - 2S = 1$.

Sistemul de bază se obţine prin transformarea articulaţiei 2 în reazem simplu şi introducerea echivalentului mecanic, în cazul de faţă o reacţiune orizontală.

Pentru sistemul de bază încărcat cu sarcinile exterioare se scriu sumele de moment în nodurile 1 şi 2, determinîndu-se astfel reacţiunile V_1 şi V_2.

$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow V_1\cdot 6 - 30\cdot 2 = 0, \text{ K } V_1 = -10KN$

$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow -V_2\cdot 6 + 30\cdot 8 = 0, \text{ K } V_2 = 40KN$

În cazul încărcării sistemului de bază cu X_1=1 se obţine reacţiunea H_1=1.

Termenul δ_{11} se obţine prin integrarea diagramei m_1 cu ea însăşi iar Δ_{1p} prin integrarea diagramei m_1 cu $M_p{}^0$.

$\delta_{11} = 2\frac{1}{EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot\frac{2}{3}\cdot 4 = \frac{42{,}66}{EI}$

$\Delta_{1p} = \frac{1}{2EI}\cdot\frac{1}{2}\cdot 60\cdot 6\cdot 4 = \frac{360}{EI}$

Ecuaţia de condiţie este o ecuaţie cu o singură necunoscută.

$42{,}66X_1 + 360 = 0$

$X_1 = 8{,}43$

$M_{34} = -4X_1 = -33{,}72$

$M_{43} = -60 - 4\cdot X_1 = 93{,}72$

Valorile momentelor pe structură s-au obţinut prin suprapunere de efecte.

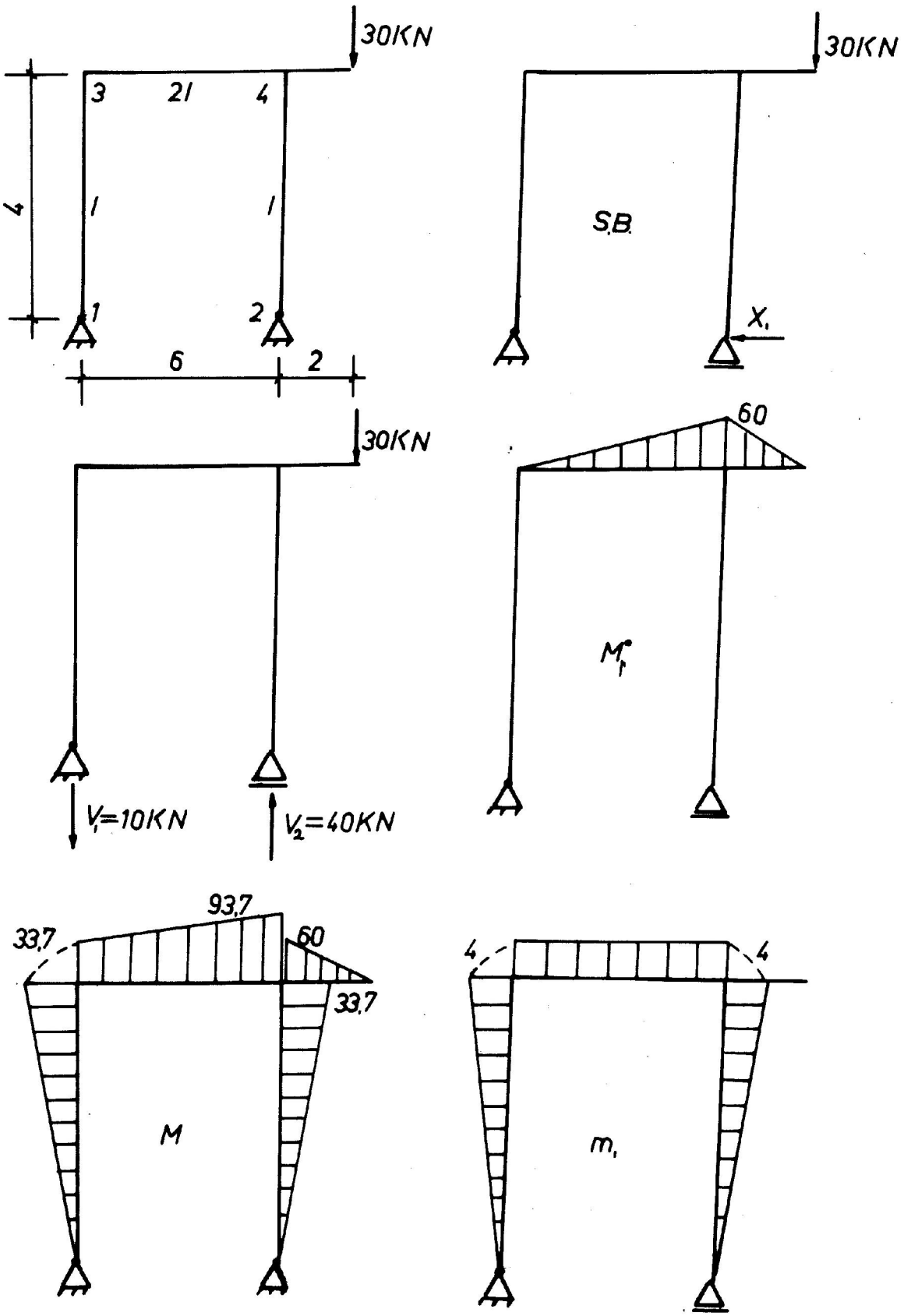


Fig.9.12 Structură cu 1 grad de nedeterminare statică

9.5 Posibilităţi de simplificare a ecuaţiilor de condiţie

În metoda generală a eforturilor, numărul ecuaţiilor de condiţie este de obicei egal cu gradul de nedeterminare statică a structurii. Cînd gradul de nedeterminare creşte, alcătuirea sistemului de ecuaţii şi în special rezolvarea acestuia devin dificile. Este deci firesc să se dea o atenţie deosebită posibilităţilor de simplificare a ecuaţiilor de condiţie. Prin aceasta, se poate extinde domeniul de aplicare practică al metodei şi la structuri cu mai multe nedeterminări, păstrîndu-se simplitatea de rezolvare.

Căile de simplificare trebuie căutate în legătură cu coeficienţii secundari ai ecuaţiilor. Aceştia au forma:

$$\delta_{ij} = \int \frac{m_i m_j}{EI} dx + \int \frac{n_i n_j}{EA} dx$$

şi deci valorile lor depind de perechile de diagrame unitare care sînt considerate. Obiectivul principal ce trebuie urmărit este de a obţine anularea a cît mai mulţi coeficienţi secundari. Cazul extrem, cînd toţi aceşti coeficienţi ar fi nuli, ar conduce la aflarea necunoscutelor static nedeterminate din ecuaţii independente cu cîte o singură necunoscută. Trebuie urmărit ca un număr cît mai mare de perechi de diagrame unitare să fie ortogonale. Această condiţie este îndeplinită cînd cele două diagrame se întind pe bare diferite (nu au nici o bară comună) sau cînd configuraţiile lor prezintă anumite particularităţi care conduc la anularea integralei.

Ortogonalizarea diagramelor unitare se poate obţine prin alegerea judicioasă a sistemului de bază, cît şi prin utilizarea unor necunoscute complexe rezultate din grupări adecvate a necunoscutelor iniţiale. Aici vom examina principial aceste două aspecte ale problemei, urmînd ca în continuare să se arate procedee cu aplicare practică eficientă.

9.5.1 Alegerea judicioasă a sistemului de bază

Este indicat ca alegerea sistemului de bază să se facă cu discernămînt, examinînd comparativ mai multe sisteme de bază posibile. Pentru aceasta nu este de obicei necesar să se traseze complet diagramele unitare, ci numai să se identifice barele pe care se întinde fiecare diagramă (spre a stabili acele perechi care nu au bare comune) cît şi anumite particularităţi ale diagramelor.

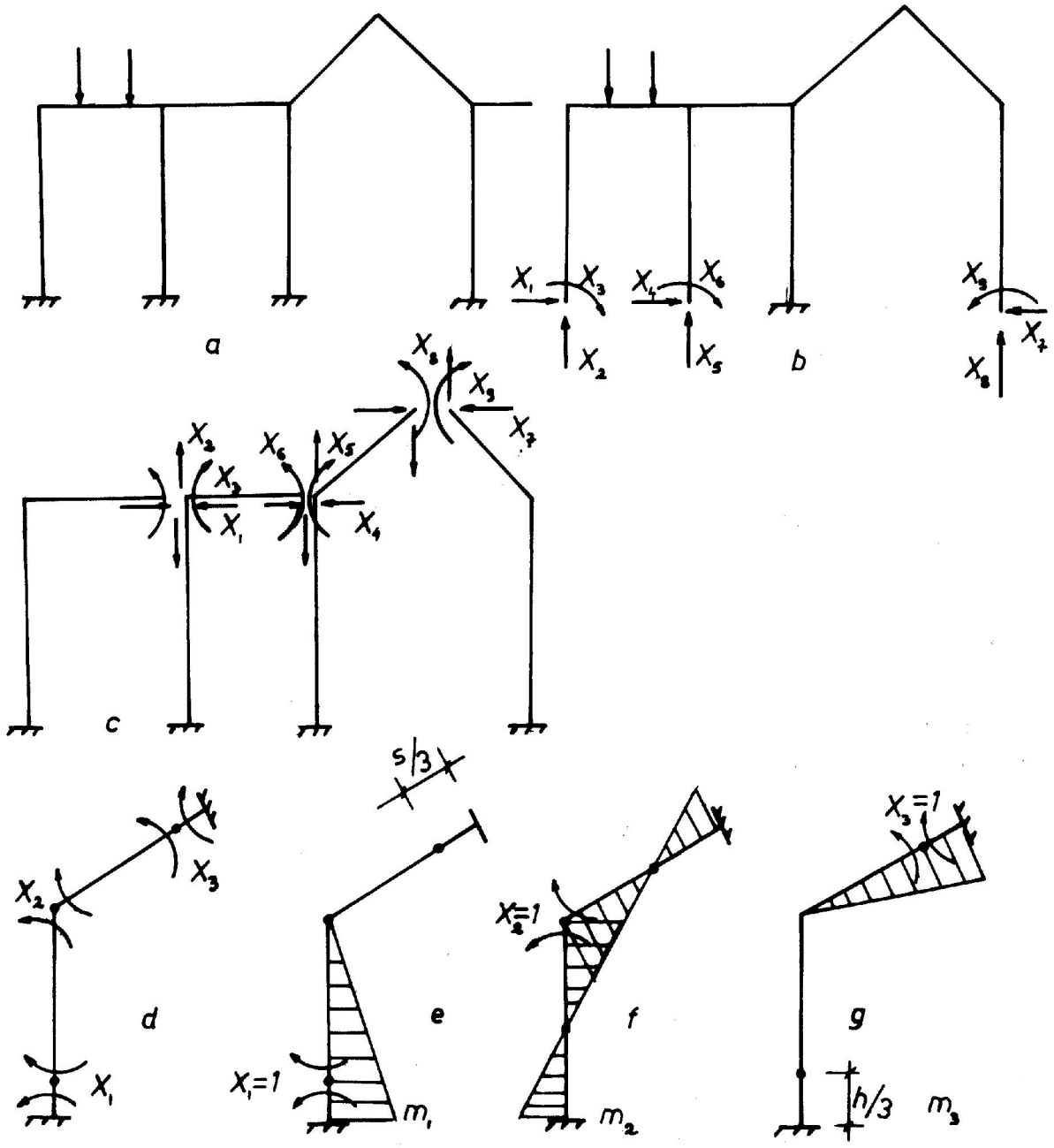


Fig.9.13 Alegerea judicioasă a sistemului de bază

Un exemplu este dat în figura 9.13, referitor la un cadru cu trei contururi şi cu încastrări şi rezemări, care este de nouă ori static nedeterminat. În figura 9.13 b şi c se arată comparativ două sisteme de bază. În primul caz s-a menţinut o singură încastrare; sistemul de bază apare ca o bară încastrată ce are mai multe braţe. Se vede imediat că diagramele date de către sarcinile unitate corespunzătoare necunoscutelor se vor întinde şi pe stîlpul care pleacă din încastrare; în consecinţă, perechile de diagrame unitare au acestă bară comună şi deci coeficienţii secundari rezultă diferiţi de zero. În al doilea caz s-au menţinut toate încastrările, secţionînd cadrul astfel încît sistemul de bază are patru porţiuni independente. Toate necunoscutele sînt perechi de forţe sau de momente, deci fiecare dă diagramă de momente încovoietoare pe cele două porţiuni vecine (fac excepţie X_2 şi X_5 care dau diagramă numai pe porţiunea din stînga. Urmărind barele comune, se obţine matricea coeficienţilor dată în figură. Din totalul de 72 de coeficienţi secundari, se anulează un număr de 34 coeficienţi , deci 47%, ceea ce reprezintă o simplificare substanţială.

Se pot examina în acelaşi mod şi alte sisteme de bază, punctînd în matricea coeficienţilor acei coeficienţi care rezultă diferiţi de zero. Compararea unor astfel de matrice schematizate poate orienta, în cazuri mai complicate alegerea judicioasă a sistemului de bază.

O observaţie utilă pentru alegerea sistemului de bază se referă la obligarea diagramelor unitare de a se anula în anumite puncte convenabil alese. Astfel, pentru o bară cotită dublu încastrată, se poate alege sistemul de bază din fig.9.13d, cu articulaţiile introduse la treimile barelor (admise cu secţiune constantă), în loc de a fi introduse în încastrări. Diagramele unitare corespunzătoare se văd în figurile 9.13e-g. Aceste diagrame sînt ortogonale două cîte două deoarece punctele de anulare din diagrama m_2 corespund poziţiei centrelor de greutate ale diagramelor unitare m_1 şi m_3. Rezultă că toţi coeficienţii secundari sînt nuli, astfel că ecuaţiile de condiţie se reduc la trei ecuaţii independente cu cîte o singură necunoscută.
Exemplificările date scot în evidenţă importanţa alegerii judicioase a sistemului de bază pentru simplificarea rezolvării.

9.5.2 Structuri simetrice

Atunci cînd structurile static nedeterminate au o axă de simetrie se pot obţine simplificări în rezolvarea sistemului de ecuaţii dacă sistemul de bază se alege suprimînd continuitatea barelor în axa de simetrie. Dacă toate necunoscutele se exteriorizează în axa de simetrie, se obţine o structură de bază simetrică asupra căreia acţionează necunoscute simetrice şi antisimetrice. Astfel pentru o structură de n ori static nedeterminată, sistemul ecuaţiilor de compatibilitate se descompune într-un sistem de p ecuaţii care conţine necunoscutele simetrice şi un sistem de q ecuaţii cu necunoscutele antisimetrice (n=p+q). În acest mod se ajunge la două sisteme de ecuaţii cu un număr mai mic de necunoscute decît cel iniţial.

În cazul în care forţele exterioare sînt simetrice, termenii liberi care conţin necunoscute antisimetrice sînt nuli, deci în consecinţă necunoscutele antisimetrice sînt nule.

În cazul în care forţele exterioare sînt antisimetrice, termenii liberi care conţin necunoscute simetrice sînt nuli, deci în consecinţă necunoscutele simetrice sînt nule.

9.5.3 Procedeul semistructurii

Procedeul semistructurii este utilizat la simplificarea sistemului de ecuaţii în metoda eforturilor, prin utilizarea simetriei structurii. Semistructura este obţinută secţionînd structura reală în axa de simetrie şi introducînd în acestă secţiune legături care înlocuiesc efectul substructurii îndepărtate şi asigură ca deformata semistructurii să fie identică cu deformata structurii reale. Aceste legături care se introduc în axa de simetrie se aleg funţie de conformaţia structurii reale şi de tipul încărcărilor care acţionează pe structură (încărcări simetrice sau antisimetrice).

Există mai multe situaţii în practică după cum urmează:
-a)axa de simetrie intersectează o riglă orizontală;
-b)axa de simetrie intersectează un nod în care concură două bare sub un anumit unghi;
-c)axa de simetrie intersectează un stîlp;

-Încărcări simetrice. Dacă structura este simetrică şi forţele simetrice atunci deformata structurii reale este simetrică. Secţiunea din axa de simetrie are deplasarea după verticală diferită de zero, iar deplasarea orizontală şi rotirea nule. Astfel în axa de simetrie se va introduce o încastrare glisantă care să impună aceste deplasări pentru semistructura rămasă. Acest tip de legătură se va introduce pentru cazurile “a” şi “b”. Pentru cazul “c” în axa de simetrie se va introduce o încastrare perfectă, deoarece secţiunea din axa de simetrie nu se poate deplasa pe verticală.
-Încărcări antisimetrice.Dacă structura este simetrică şi forţele sînt antisimetrice atunci deformata structurii este antisimetrică. Secţiunea din axa de simetrie are deplasarea pe orizontală şi rotaţia diferite de zero, deplasarea pe verticală egală cu zero. Astfel, în axa de simetrie se va introduce un

reazem simplu care să permită aceste deplasări pentru semistructura rămasă. Acest tip de legătură se va introduce pentru cazurile “a” şi “b”. Pentru cazul “c” în axa de simetrie se va introduce un stîlp cu rigiditatea la jumătate faţă de valoarea iniţială .
Prezentarea acestor cazuri este făcută în fig. 9.14.

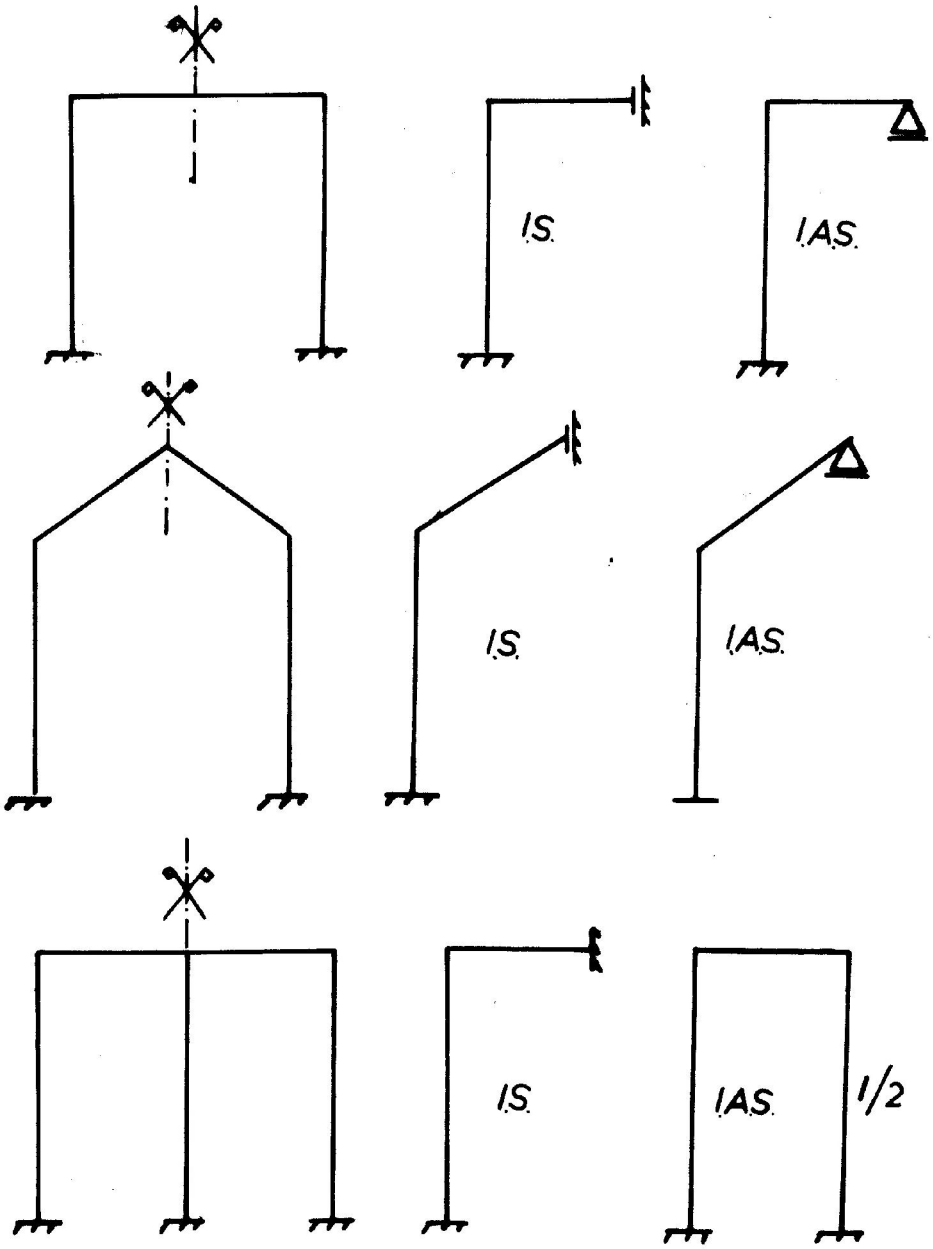


Fig.9.14 Semistructuri pentru încărcare simetrică şi antisimetrică

9.5.4 Procedeul grupării necunoscutelor

Procedeul grupării necunoscutelor permite reducerea numărului de necunoscute şi a volumului de calcule. Acest procedeu se aplică structurilor simetrice încărcate simetric sau antisimetric.

Pentru structurile simetrice încărcate simetric se va rezolva numai gruparea simetrică iar în cazul structurilor simetrice încărcate antisimetric se va rezolva numai gruparea antisimetrică. Numărul total al necunoscutelor grupate simetric şi antisimetric trebuie să fie egal cu gradul de nedeterminare statică.

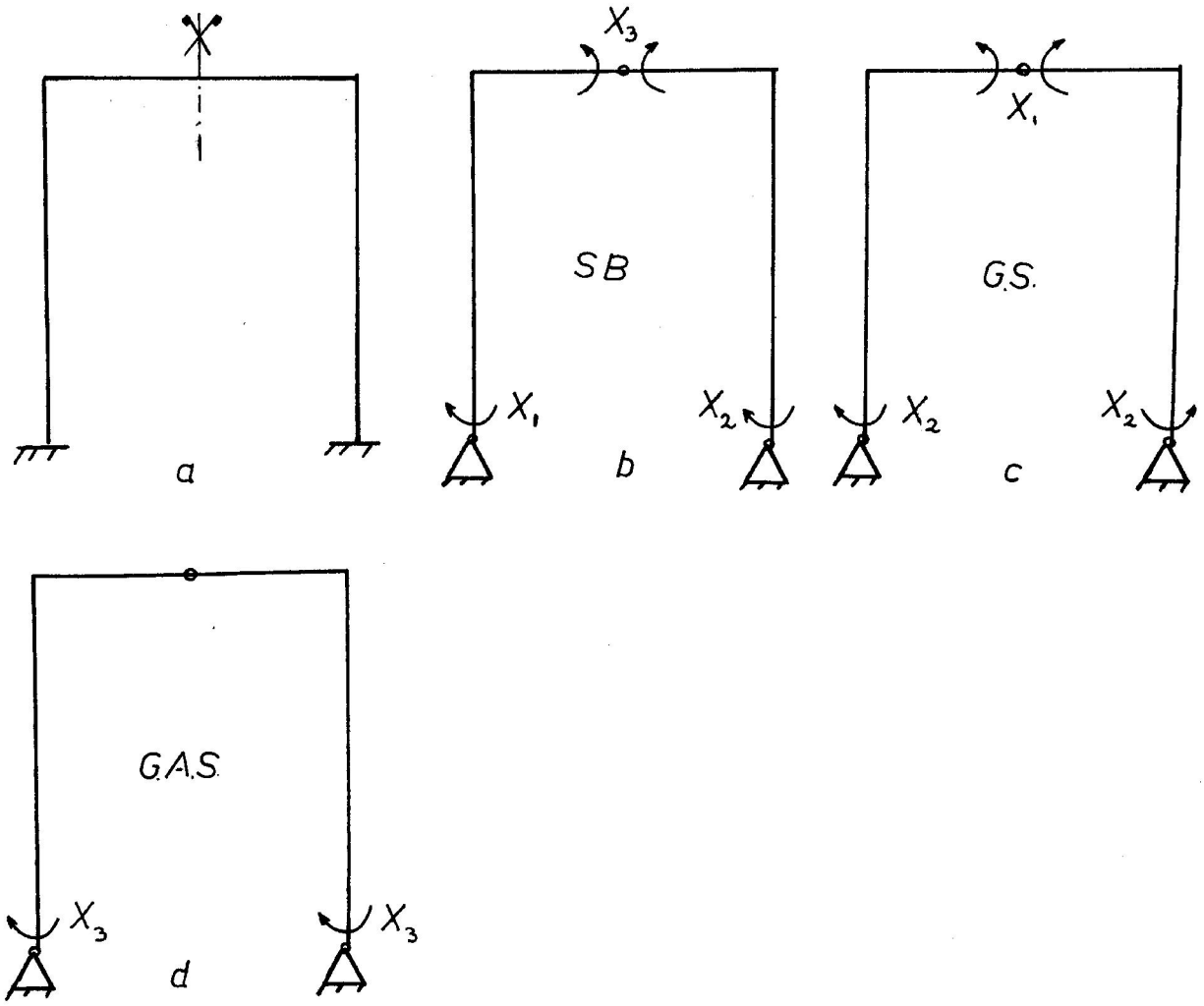


Fig.9.15 a) structură iniţială; b) sistem de bază fără a se ţine cont de proprietăţile de simetrie şi încărcare; c) grupare simetrică; d) grupare antisimetrică

9.5.5 Transferarea necunoscutelor

Un procedeu simplu, prin care se obţine gruparea necunoscutelor, constă în transferarea unor necunoscute din poziţia lor iniţială în alte poziţii. În acest scop se introduc braţe fictive perfect rigide, care se consideră încastrate de capetele unei bare secţionate ca în fig.9.16 e sau i . Prezenţa barelor fictive nu aduce nici o modificare în comportarea elastică a structurii, dar permite să se intervină asupra modului de acţiune a necunoscutelor. Prin alegerea convenabilă a unor noi poziţii pentru necunoscute, devine posibilă impunerea anumitor condiţii de anulare a coeficienţilor secundari, obţinînd ortogonalizarea unor perechi de diagrame unitare.

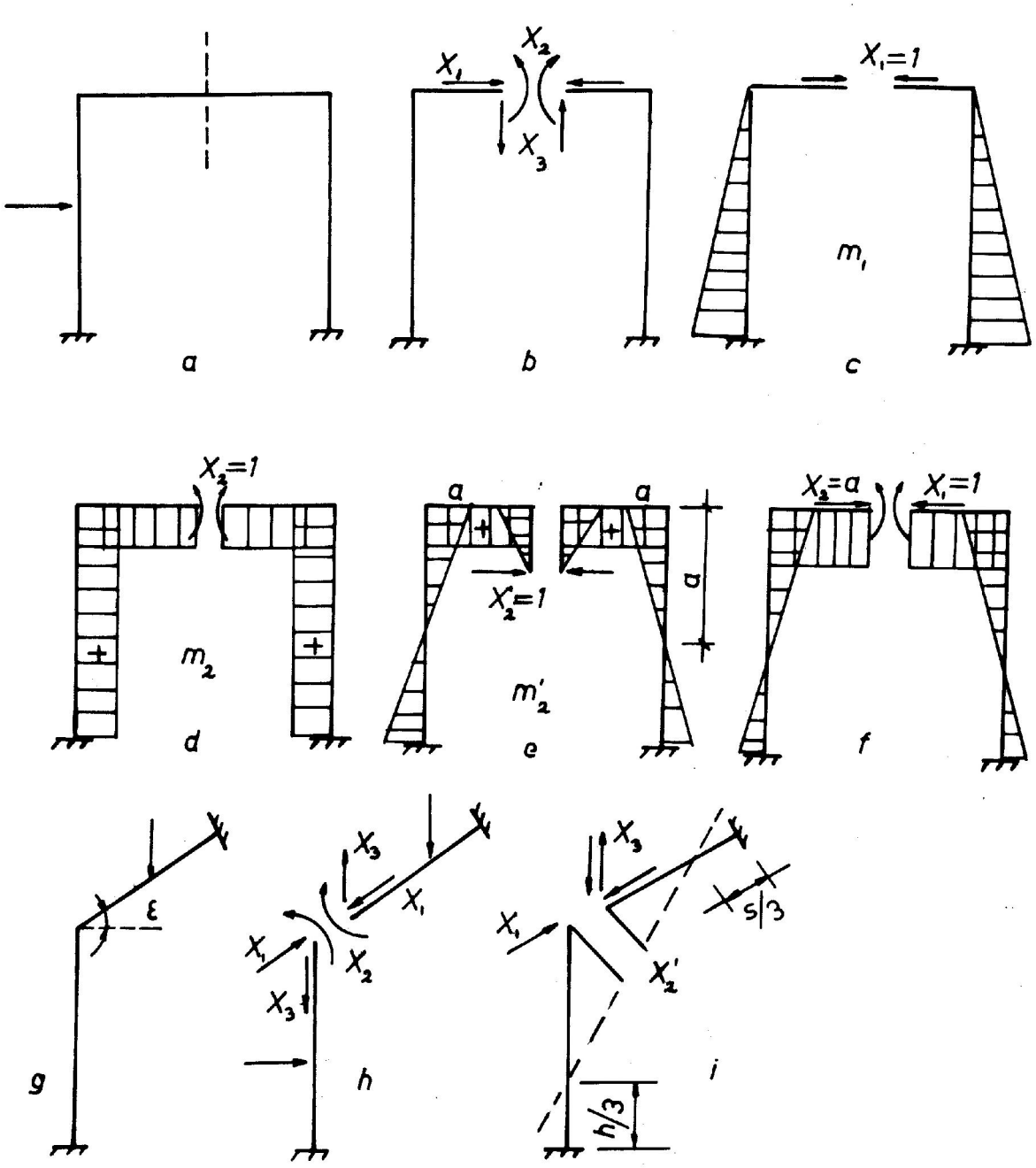


Fig.9.16 Transferarea necunoscutelor

Fie exemplul din fig. 9.16 a, pentru care s-a ales sistemul de bază din fig.9.16b. Diagramele unitare m_1 şi m_2, corespunzătoare necunoscutelor X_1 şi X_2 sînt arătate în fig. 9.16 c şi d; rezultă $\delta_{12} = \delta_{21} \neq 0$.

Să înlocuim acum necunoscutele unitate X_2=1 prin necunoscuta unitate X_2'=1, aplicată prin intermediul unei perechi de braţe fictive perfect rigide, ca în fig.9.16e. Aceste noi necunoscute îi corespunde diagrama unitară m_2. Dacă se alege a=2h/3, diagramele m_1,m_2' devin ortogonale între ele pentru bare de secţiune constantă şi deci $\delta_{12}' = \delta_{21}' = 0$. Înseamnă că utilizarea necunoscutelor X_1 şi X_2',în loc de necunoscutele X_1 şi X_2 asigură independenţa acestor necunoscute.

Semnificaţia necunoscutei X_2' apare admiţînd suprimate braţele fictive şi aplicînd efectul lor asupra capetelor barei secţionate, ca în fig. 9.16f. Se vede imediat că prin transferarea efectuată s-a realizat de fapt o grupare a necunoscutelor X_1 şi X_2, în sensul că diagrama m_2' poate fi obţinută din m_1 şi m_2 prin combinarea $m_2' = m_1 + a \cdot m_2$. Înseamnă că diagrama m_2' poate înlocui una sau alta

dintre diagramele iniţiale m_1 şi m_2 dar nu poate fi considerată împreună cu amîndouă deoarece nu este diferită de ele.

Transferarea uneia sau a mai multor necunoscute prin braţe fictive se poate face în diferite moduri, ca poziţie şi direcţie. Fie de exemplu grinda cotită dublu încastrată din fig. 9.16g şi sistemul de bază arătat în fig. 9.16h unde s-a efectuat o secţionare completă în nod. Necunoscuta X_1 dă o diagramă triunghiulară numai pe stîlp, iar X_3 dă o diagramă triunghiulară numai pe bară înclinată, asemănătoare cu cele din fig. 9.16e şi g; în schimb X_2 dă diagramă pe ambele bare, astfel că $\delta_{12} = \delta_{21} \neq 0$.

În figura 9.16i se arată o nouă alegere a necunoscutelor, unde X_2 a fost înlocuit –prin transferare- cu X_2'; perechea de forţe care reprezintă această necunoscută este dirijată după linia care uneşte punctele situate la treimile extreme ale celor două bare. Diagrama m_2' este similară cu aceea din fig. 9.16f şi deci diagramele m_1,m_2' şi m_3 sînt ortogonale două cîte două, astfel că toţi coeficienţii secunndari se anulează.

Dacă se elimină şi în acest caz braţele fictive, reducînd pe X_2' în raport cu centrul de greutate al nodului, se constată că de fapt X_2' reprezintă o necunoscută care rezultă prin gruparea celor trei necunoscute iniţiale. Întradevăr, componentele lui X_2'=1 pe direcţiile acestora sînt:

$\alpha_{21} = \cos\beta / \cos\varepsilon \quad \alpha_{22} = a \ , \alpha_{23} = -\sin(\beta - \varepsilon) / \cos\varepsilon$

astfel că se poate scrie

$m_2' = \alpha_{21} m_1 + \alpha_{22} m_2 + \alpha_{23} m_3$

care reprezintă o grupare liniară a diagramelor iniţiale şi care poate înlocui pe oricare dintre ele, de exemplu pe m_2 în cazul de faţă.

Transferarea necunoscutelor se dovedeşte utilă în multe cazuri; alte exemplificări se vor da mai departe.

Exemplul 6: Pentru structura static nedeterminată din figura 9.17 să se traseze diagrama finală de moment încovoietor, folosind metoda eforturilor, utilizînd procedeul semistructurii.

Structura fiind simetrică încărcată antisimetric, pentru semistructură, în axa de simetrie, se va introduce un reazem simplu. Semistructura astfel obţinută este odată static nedeterminată. Sistemul de bază se obţine prin transformarea încastrării 1 în articulaţie plus echivalentul mecanic un moment X_1.

Calcul reacţiuni S.B. încărcat cu forţe exterioare:

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow -V_1 \cdot 8 + 60 \cdot 6 = 0 \rightarrow V_1 = 45KN$$

$$\left(\sum M\right)_1 = 0 \rightarrow 60 \cdot 6 - V_2 \cdot 8 = 0 \rightarrow V_2 = 45KN$$

Calcul reacţiuni S.B. încărcat cu necunoscuta X_1=1

$$\left(\sum M\right)_2 = 0 \rightarrow -V_1 \cdot 8 + 1 = 0 \rightarrow V_1 = \frac{1}{8}$$

Ecuaţia de condiţie, în acest caz, are forma:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1p} = 0 \rightarrow$$

$$\delta_{11} = \int \frac{m_1^{\ 2}}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 7{,}21 \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} 7{,}21 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) +$$

$$\frac{1}{4EI} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{EI} (1{,}502 + 0{,}6 + 0{,}083) = \frac{2{,}18}{EI}$$

$$\Delta_{1p} = \int \frac{M_p^{\ 0} m_1}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \frac{1}{2} 180 \cdot 7{,}21 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) +$$

$$\frac{1}{4EI} \frac{1}{2} \cdot 180 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{EI} (216{,}3 + 30) = \frac{246{,}3}{EI}$$

$$X_1 = -\frac{246,3}{2,18} = -112,98$$

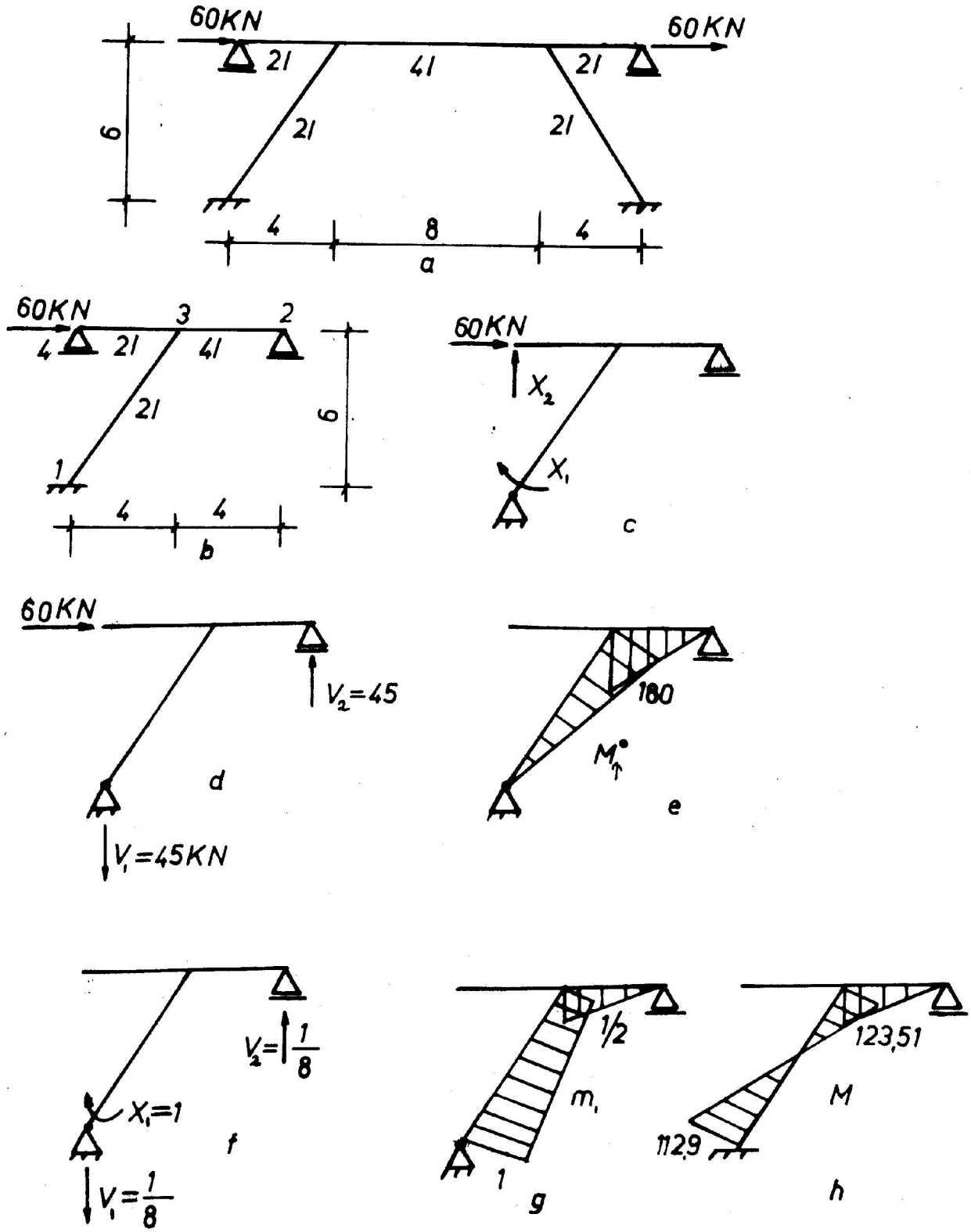


Fig.9.17 Rezolvare structură simetrică folosind procedeul semistructurii.
a) structură iniţială; b)semistructură; c) sistem de bază; d) sistem de bază încărcat cu sarcini exterioare; e)diagramă de moment M_p^0;f)diagramă de moment sistem de bază încărcat cu sarcini exterioare; g) diagramă unitară m_1 ; h)diagramă finală de moment